De verdeling van de toekomstige aandelenprijzen

Hilst, Jan van der

Publication date:
1989

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

De verdeling van de toekomstige aandelenprijzen

Jan van der Hilst

tup

TILBURG UNIVERSITY PRESS

De verdeling van de toekomstige aandelenprijzen

De verdeling van de toekomstige aandelenprijzen

Proefschrift

ter verkrijging van de graad van doctor
aan de Katholieke Universiteit Brabant,
op gezag van de rector magnificus, prof. dr. R.A. de Moor,
in het openbaar te verdedigen ten overstaan van
een door het college van dekanen aangewezen commissie
in de aula van de Universiteit
op vrijdag 12 mei 1989 te 14.15 uur

door

Jan van der Hilst

geboren te Brielle

Tilburg
University
Press
1989

Promotor: Prof. Dr. S.E. de Jong

VOORWOORD

Gaarne wil ik een aantal personen en instanties expliciet dankzeggen voor de directe en indirecte steun bij het tot stand komen van deze studie.
Dit geldt in het bijzonder prof. dr. S.E. de Jong. Als voorzitter van de toenmalige vakgroep Ondernemingsfinanciering heeft hij mij begeleid en voldoende vrijheid gegeven om naar eigen inzicht deze studie af te ronden.
Drs. P.J.W. Duffhues en de overige leden van de sectie Ondernemingsfinanciering voor de jarenlange vrienschap en collegialiteit.
Collega's van de Economische Faculteit.
Dr. A.B. Dorsman voor de goede en intensieve samenwerking.
Prof. dr. J.J. Sijben, die tesamen met prof. dr. S.E. de Jong de coördinator is van de School voor Bankwezen en Financiering van het TIAS.
Het rekencentrum van de Katholieke Universiteit te Tilburg.
De Staal-stichting.

Een mens heeft een "achtergrond" nodig. Ik heb die gevonden in de relatie met mijn ouders, mijn broers en zus en mijn schoonfamilie.

Een mens heeft ook een "thuis" nodig.
Marlies, Joost Jan Joep en Marloes, bedankt voor jullie steun en begrip.

INHOUD

HOOFDSTUK 1 INLEIDING EN SAMENHANG

1.1 Inleiding

De toekomst is onzeker. Daarom wil de mens graag meer van zijn toekomst kennen. In de economische wetenschap hanteren we vaak de verwachte waarde van grootheden. Dit suggereert, dat er blijkbaar een of andere kansverdeling aanwezig is, waarvan men de verwachtingswaarde kan bepalen. Een van de grote problemen vormt de vaststelling van die kansverdeling van de beschouwde grootheid. Vaak begint men met de vaststelling van de verdeling van de grootheid, zoals deze zich heeft voorgedaan in het verleden. Door een of andere relatie te onderkennen, maakt men een schatting van de toekomst. Naarmate men betere schattingen krijgt omtrent de toekomst, kan men nú betere beslissingen nemen om in te spelen op die toekomst.

Een van de gebieden, waarvoor we graag goede schattingen willen hebben omtrent de toekomstige verdeling, bevindt zich in de vermogensmarkt. Het betreft in het bijzonder de aandelenprijzen[1] van ondernemingen. In plaats van de verdeling van de toekomstige aandelenkoersen, is het ook mogelijk de verdeling van de toekomstige rendementen als afgeleide van de toekomstige aandelenkoersen te beschouwen. We zullen nagaan, uitgaande van de hypothese van normaliteit, hoe de verdeling van de toekomstige aandelenkoersen eruit ziet.

Enkele hoofdstukken zijn gebaseerd op reeds eerder verschenen artikelen; deze zijn echter wel bewerkt in het licht van de probleemstelling van deze studie. Dit betreft met name delen van de hoofdstukken 2, 3 en 4 en een klein deel van hoofdstuk 5. Ten aanzien van deze artikelen geldt, dat een aantal daar-

---

1. In deze studie zullen we de begrippen "aandelenprijzen" en "aandelenkoersen" als synoniemen beschouwen.

van op onze naam staat, maar ook enkele zijn ontstaan en gepubliceerd in samenwerking met A.B.Dorsman. Tijdens de onderzoekperiode is een samenwerkingsverband ontstaan tussen ons beiden dat in een grote reeks publikaties heeft geresulteerd. Het is daarom niet steeds mogelijk zijn bijdrage te scheiden van de onze. Dit betreft delen van de hoofdstukken 2, 3 en 4.

1.2 Samenhang

Het rendement, dat naar verwachting behaald wordt met een belegging in aandelen, is een onzekere grootheid. Deze grootheid is wellicht te beschrijven met een kansverdeling. Bij veel theorieën, op het gebied van de ondernemingsfinanciering en de beleggingen, wordt uitgegaan van normaliteit. De normaliteitsaanname kunnen we ook toepassen op de verdeling van aandelenopbrengsten of nog beter de logaritmen daaruit. Een tweetal theorieën gaat daar van uit. Dit zijn met name het Capital Asset Pricing Model (CAPM) en de moderne optie-theorie. De eerste geeft een relatie tussen het verwachte rendement en het risico. Hiermee kan de verwachte waarde van de toekomstige aandelenprijs worden bepaald. De tweede geeft de waarde weer van voorwaardelijke aanspraken. Een van de waardebepalende factoren is de variantie van de aandelenopbrengsten. Daarom wordt deze theorie hier gebruikt om de spreiding van de verdeling te bepalen.

De centrale probleemstelling in dit werk is steeds gericht op de vraag of het mogelijk is iets te zeggen omtrent de verdeling van de onzekere toekomstige aandelenkoersen en welke factoren invloed hierop uitoefenen.

Alvorens dit verder uit te werken, wordt in deze studie eerst veel aandacht geschonken aan de empirische toetsing van de normaliteitshypothese. Zo wordt aandacht geschonken aan de vraag hoe deze verdelingen er feitelijk uitzien op de Amsterdamse Effectenbeurs. Zijn deze verdelingen ex-post te beschrijven met een normale verdeling? Dit is op een aantal manieren te toetsen. Vervolgens willen we het CAPM toepassen op Nederlandse aandelen. Hiervoor is het rendement van de marktportefeuille nodig. Het rendement op die portefeuille wordt vaak benaderd via een index. Daarom zal aandacht geschonken worden aan het samenstellen van indices. We komen met een tweetal eigen indices, een gewogen index, de Tilburg Amsterdam Marktindex (TAM) en een ongewogen index (TAM-O). Met behulp van die twee indices is het mogelijk de zogenaamde bèta-coëfficiënten van de aandelen te bepalen. Tenslotte zal aandacht geschonken worden aan de optie-theorie. Deze is, zoals reeds is aan gegeven, van belang voor de bepaling van de onzekerheid van de verdeling van aandelenprijzen. Met behulp van het optiemodel kan dan de verdeling bepaald worden van aandelenkoersen op ieder willekeurig tijdstip in de toekomst. Dit zal eerst geschieden in een wereld die gebaseerd is op risico-neutraal gedrag, vervolgens zal echter ook de verdeling bepaald worden in een wereld die meer aansluit bij de werkelijkheid, namelijk in een risico-mijdende wereld. Nagegaan zal worden wat de invloed is van wijzigingen van een aantal parameters op de toekomstige verdeling.

1.3 Opbouw

In hoofdstuk 2 wordt gestart met de feitelijke verdeling van de aandelenrendementen. Dit betreft een onderzoek naar de verdeling van de aandelenrendementen op de Amsterdamse Effectenbeurs. Dit geschiedt aan de hand van gerealiseerde rendementen. Indien er sprake blijkt te zijn van stationaire verdelingen, kan de getoetste verdeling ex-post gebruikt worden voor de verwachte verdeling ex-ante. Eerst wordt aandacht geschonken aan de theoretische fundering van de normaliteit. Indien aan een aantal eisen is voldaan, zijn de logaritmen van de rendementen normaal en de aandelenkoersen lognormaal verdeeld.

Uitgangspunt is de hypothese dat de verdeling van de logaritmen van de aandelenrendementen te beschrijven is met behulp van een zogenaamde Stabiele Pareto-verdeling. Dan is het mogelijk door het schatten van de zogenaamde karakteristieke coëfficiënt (α) vast te stellen of de verdeling normaal is. Indien namelijk de waarde van α gelijk is aan twee, is er sprake van een normale verdeling. Wanneer de waarde van de karakteristieke coëfficiënt kleiner is dan twee, kan er nog wel sprake zijn van een stabiele, maar niet van een normale verdeling. Uit het onderzoek blijkt dat de karakteristieke coëfficiënt kleiner is dan twee en op grond hiervan zouden we normaliteit moeten verwerpen. Dit heeft een aantal vervelende consequenties. Zo is de variantie niet eindig en is risicoreductie door portefeuillevorming minder eenvoudig. Men heeft dan namelijk een groter aantal verschillende aandelen nodig om het risico te verminderen.

Het is echter de vraag of op praktische gronden toch niet uitgegaan kan worden van normaliteit. Indien de afwijking niet al te groot is, zou op statistische gronden de hypothese verworpen moeten worden, maar kunnen we op economische gronden de hypothese handhaven. Op grond van onder andere de voordelen wordt in het verdere verloop van deze studie,indien niet anders vermeld, als werkhypothese aangenomen dat er sprake is van normaliteit van de logaritmen van de aandelenrendementen en van lognormaliteit voor de aandelenkoersen.
Zoals reeds eerder is opgemerkt, wordt bij het Capital Asset Pricing Model ook uitgegaan van normaliteit van de verdeling van de rendementen. Het is met behulp van het CAPM mogelijk om de verwachte waarde van het rendement van een aandeel te bepalen. Dit geschiedt via de Security Market Line (SML). Deze relatie luidt als volgt:

$$E(R_j) = R_F + \beta[E(R_M) - R_F] \tag{1.1}$$

waarin: $E(R_j)$ = het verwachte rendement van aandeel j

R_F = de risicovrije interestvoet;
$E(R_M)$ = het verwachte rendement van de marktportefeuille;
β = risicomaatstaf (de bèta).

Om de verwachte waarde van het rendement van een aandeel te kunnen bepalen via de SML, is de waarde van het verwachte rendement van de marktportefeuille nodig. Dit geldt ook bij de berekening van de bèta van een aandeel. Het rendement op de marktportefeuille wordt, zoals reeds is aangegeven, meestal bepaald met behulp van een aandelenindex als benadering van de marktportefeuille.

Hoofdstuk 3 houdt zich daarom bezig met indices. Allereerst wordt aandacht geschonken aan de problemen bij de constructie van een index. Vervolgens wordt een aantal Amerikaanse indices besproken, gevolgd door een bespreking van indices op de Amsterdamse aandelenmarkt.
Aangezien geen van de bestaande indices op de Amsterdamse Effectenbeurs alle problemen op een enigszins bevredigende wijze oplost, wordt een tweetal nieuwe, zelf geconstrueerde indices gepresenteerd. Gekozen wordt voor enerzijds een index die gewogen samengesteld is op basis van de marktwaarde van de fondsen, en anderzijds een index die ongewogen is samengesteld. In beide gevallen geldt, dat uitgegaan wordt van de "total return" van de aandelen. Niet alle fondsen van de Amsterdamse Effectenbeurs zijn opgenomen, slechts 50 stuks. Wel geldt, dat deze 50 fondsen meer dan 90% van de totale kapitalisatie vertegenwoordigen. Het betreft dezelfde fondsen, die opgenomen zijn in de huidige ANP-CBS beursindex.

In hoofdstuk 4 wordt voortgebouwd op deze door ons ontwikkelde marktindex om de waarde te bepalen van de bèta's van aandelen. Zoals reeds is aangegeven vormt de bèta een maatstaf voor het risico. In dit hoofdstuk worden de waarden weergegeven van de bèta's van die Nederlandse aandelen,die opgenomen zijn in de index. Vervolgens wordt aandacht ge-

schonken aan de stationariteit en de stabiliteit van bèta's. Daarna komt de voorspelbaarheid van bèta's aan de orde. Er blijken problemen te zijn met de stationariteit en de stabiliteit van bèta's en dus met de voorspelbaarheid.
Een mogelijke verklaring wordt toegelicht vanuit de optietheorie. Deze theorie is ook bruikbaar om de spreiding in de verwachte rendementsverdeling te bepalen. Mede daarom komt in hoofdstuk 5 deze theorie aan de orde voor zo ver deze bruikbaar is binnen het kader van deze studie.
Om te komen tot een beter inzicht in de factoren die de waarde van een optie bepalen, wordt eerst de waarde van een optie bepaald in een wereld waarin aandelen te beschrijven zijn via een discrete verdeling: de binomiale verdeling. Hierin komt duidelijk de rol naar voren van de factor $N(d_2)$. Deze is in een risico-neutrale wereld te interpreteren als een kansgrootheid, namelijk de kans dat de aandelenprijs op het einde van de looptijd boven de uitoefenprijs komt te liggen.
De variantie is één van de parameters die hierbij nodig is. Nu is het mogelijk de variantie die "leeft" in de markt te meten met behulp van de zogenaamde impliciete variantie. In hoofdstuk 6 wordt hieraan aandacht geschonken. Met behulp van deze variantie meten we vervolgens de onzekerheid, die door de "markt" gehanteerd wordt. Gegeven de onzekerheid is het ons inziens mogelijk om met behulp van de reeds vermelde factor $N(d_2)$ de verdeling van de aandelenkoersen op ieder willekeurig tijdstip in de toekomst te bepalen. Van belang is de invloed van wijzigingen van de parameters. Dit wordt beschreven in het laatste deel van dit hoofdstuk.

In de hoofdstukken 5 en 6 is uitgegaan van risico-neutraliteit bij de bepaling van de toekomstige verdeling van de aandelenkoersen. In hoofdstuk 7 wordt deze aanname vervangen door risico-mijdend gedrag. We kunnen dan een koppeling maken tussen het CAPM en de benadering via de optietheorie. Er wordt aandacht geschonken aan de lognormale verdeling, waarvan een aantal kenmerken nader beschreven wordt. Ook wordt de verdeling van de toekomstige aandelenprijzen weergegeven en de invloed van wijzigingen van de parameters verder uitgewerkt. In hoofdstuk 8 tenslotte, wordt een aantal conclusies geformuleerd en een samenvatting gegeven.

Deze studie moet gezien worden als een afsluiting van een reeks van jaren, waarin zowel individueel als gezamenlijk onderzoek gedaan is naar de situatie op de Amsterdamse Effectenbeurs, de European Options Exchange te Amsterdam en de theoretische ontwikkelingen omtrent de vakgebieden ondernemingsfinanciering en belegging. Vooral de aandacht voor de bepaling van de toekomstige verdeling van de aandelenprijzen en de invloed van wijzigingen van de parameters, is in de bestaande literatuur nauwelijks terug te vinden.

HOOFDSTUK 2 DE FEITELIJKE RENDEMENTSVERDELING

2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt de feitelijke verdeling van aandelenrendementen op de Amsterdamse Effectenbeurs onderzocht. Eerst echter zal kort aandacht geschonken worden aan de onderliggende theorie.
In veel onderzoeken naar het koersgedrag van aandelen wordt impliciet de efficiënte-markt hypothese (EMH) getoetst. Voor het toetsen van deze hypothese is de verdeling van het rendement van aandelen van belang. Reeds in 1900 suggereerde Bachelier [1900] het "random-walk" model. Hij kwam tot dit model na zijn onderzoek naar het koersgedrag van staatsobligaties aan de beurs in Frankrijk. Veel later kwam Osborne [1959] tot eenzelfde model. Bachelier en Osborne veronderstelden beiden dat koersschommelingen van een individueel aandeel van transactie tot transactie onafhankelijk waren en dat zij een toevallige steekproef vormen uit dezelfde kansverdeling. Zij namen aan, dat het aantal transacties uniform gespreid is in de tijd en dat de koersschommelingen van transactie tot transactie een eindige variantie bezitten. Bij grote aantallen transacties kan de centrale limietstelling dan worden toegepast. Bachelier noch Osborne slaagden erin om de empirische onderbouwing van de normaliteitsveronderstelling te verschaffen. Dit lukte Moore [1962] en Kendall [1953] wel. Laatstgenoemde auteurs vonden echter dat de verdeling iets dikkere staarten en grotere concentraties om het gemiddelde had dan de normale verdeling. Dit verschijnsel duidt men wel aan met de term leptocurtosis. Hierna kwam Mandelbrot [1963] met zijn Pareto-verdeling. Fama [1965] onderschreef de hypothese van Mandelbrot, dat de rendementen zich gedragen volgens een Pareto-verdeling. Levy [1925,1937] heeft aangetoond dat de Pareto-verdeling de enige mogelijke limietverdeling is van de sommen van onafhankelijke variabelen.

In dit hoofdstuk wordt de feitelijke verdeling van de aandelenrendementen nader onderzocht. Hiertoe wordt dan eerst gekeken naar de theoretische fundering van de verdeling. Vervolgens wordt een aantal mogelijke toetsen besproken, die gebruikt kunnen worden bij het onderzoek naar de verdeling. Een aantal toetsen wordt uitgevoerd op twee sets van data. Dit betreft enerzijds een set van 1000 dagkoersen van een drietal grote ondernemingen (Koninklijke Olie, Philips en Unilever). Anderzijds zijn de toetsen uitgevoerd op de aandelen die deel uitmaken van de ANP-CBS beursindex. Aan de hand van meerdere toetsen en berekeningen is nagegaan in hoeverre de hypothese van (log)normaliteit te handhaven is.

2.2 Theorie

Men kan het rendement (R_j), behaald met een belegging in een aandeel j gedurende een periode t, opgebouwd zien als de verhouding van de som van de koerswinst (-verlies) en het verkregen dividend tot de oorspronkelijke investering (total return). De koerswinst (-verlies) is dan het verschil tussen de marktprijs aan het einde van periode t en de prijs aan het begin van periode t, gecorrigeerd voor stock-dividenden, bonusuitkeringen, split-ups etc. Voor een aandeel geldt dan:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} - 1 \qquad (2.1)$$

waarin: R_t = rendement over periode t;

P_{t-1} = prijs van het aandeel aan het begin van periode t;

P_t = prijs van het aandeel aan het einde van periode t (gecorrigeerd voor stockdividenden, bonusaandelen etc tijdens periode t);

D_t = contante uitkeringen ontvangen gedurende periode t.

Dit is ook te schrijven als:

$$1 + R_t = \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \tag{2.2}$$

De periode t kan men opdelen in een aantal subperioden respectievelijk 1, 2,..., n. Het rendement dat behaald wordt in subperiode 1 (r_1) is dan:

$$r_1 = \frac{P_1 + D_1 - P_0}{P_0} \quad \text{of } 1+r_1 = \frac{P_1 + D_1}{P_0} \tag{2.3}$$

Voor de tweede subperiode geldt dan:

$$1 + r_2 = \frac{P_2 + D_2}{P_1}$$

Het rendement over de twee subperioden bedraagt dan het produkt van de twee afzonderlijke rendementen: oftewel

$$(1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \tag{2.4}$$

Het rendement over de gehele periode t is zo te schrijven als het produkt van de rendementen van alle subperioden:

$$1 + R_t = (1+r_1) \cdot (1+r_2\ ) \cdot \cdots \cdot (1+ r_n) \tag{2.5}$$

Door in vergelijking (2.5) links en rechts de natuurlijke logaritme te nemen, krijgt men :

$$\begin{aligned} \text{Ln}\ (1+R_t) &= \ln[(1+r_1) \cdot (1+r_2) \cdot\cdots\cdot (1+r_n)] = \\ &= \Sigma_i \ln(1 + r_i) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Indien nu de r_i's onafhankelijk en identiek verdeeld zijn, zijn de $\ln(1+r_i)$'s eveneens onafhankelijk en identiek verdeeld. Als tevens geldt, dat deze verdeling een eindig gemiddelde en een eindige variantie bezit, zal volgens het centrale-limiet-theorema gelden, dat de verdeling van $\ln(1+R_t)$ bij benadering normaal verdeeld is indien het aantal subperioden voldoende groot is. Indien $\ln(1+R_t)$ normaal verdeeld is, is $1+R_t$ en dus eveneens R_t lognormaal verdeeld. Hieruit volgt dan weer dat de koers van een aandeel aan het einde van een periode lognormaal verdeeld is.

In dit onderzoek wordt gewerkt met dag- en weekkoersen. Dit heeft tot gevolg, dat de waarde van R_t meestal kleiner zal zijn dan 15%. Dan geldt dat de numerieke waarde van $\ln(1+R_t)$ ongeveer gelijk is aan $1+R_t$. Tevens geldt dan tevens dat $1+R_t$ normaal verdeeld is.

Een belangrijke voorwaarde voor normaliteit van de logaritmen uit de rendementen is het onafhankelijk zijn van de opeenvolgende rendementen. Of hier al dan niet aan voldaan is, valt op diverse manieren statistisch te toetsen, onder andere door middel van seriecorrelatietoetsen. In dit onderzoek is gebruik gemaakt van de seriecorrelatietoets van Kendall [1968], waarmee getoetst is of er autocorrelatie aanwezig is tussen de elkaar opeenvolgende rendementen. Het is ook mogelijk te toetsen met een "lag" tussen opeenvolgende waarnemingen.
Dorsman en De Gooijer [1982] vonden voor daggegevens dat in 16 van de 120 onderzochte gevallen (13,3%) de hypothese van onafhankelijkheid van opeenvolgende rendementen verworpen diende te worden. Dit betrof Nederlandse aandelen. Fama [1965] vermeldt (voor Amerikaanse aandelen) dat er bij 41 van de 300 gevallen (13,7%) sprake was van significante autocorrelatie tussen de opeenvolgende dagrendementen.
Indien de verdeling normaal is, zal de Student-Range (SR) met een grote kans tussen bepaalde grenzen liggen. De SR is gedefinieerd als het verschil tussen de hoogste en de laagste waarneming, gedeeld door de standaardafwijking. Door de SR van de aandelenrendementen te bepalen kunnen we de hypothese van normaliteit toetsen.

Een reeds aangeduide benaderingswijze is, om uitgaande van de hypothese dat de verdeling stabiel is, te veronderstellen dat de verdeling behoort tot de zogenaamde Stabiele Pareto-verdelingen. De normale verdeling is een van de leden van deze verzameling. De Stabiele Pareto-verdelingen worden door een viertal parameters gekarakteriseerd, vaak aangeduid met respectievelijk α, β, γ en δ. De parameter α noemt men de karakteristieke exponent. Bij een normale verdeling heeft deze de waarde 2. Alle andere Pareto-verdelingen hebben een α-waarde kleiner dan 2. De Cauchy-verdeling bijvoorbeeld is een Pareto-verdeling met een α-waarde gelijk aan 1. De parameter β is een indicatie voor de scheefheid van de verdeling. Bij een symmetrische verdeling heeft deze parameter de waarde nul. De spreiding van de verdeling wordt weergegeven door γ. Bij de normale verdeling heeft γ de waarde $\frac{1}{2} \cdot \sigma^2$ en daardoor bij de gestandaardiseerde normale verdeling de waarde 1/2. Als α groter is dan 1, stelt δ de verwachte waarde of het gemiddelde van de verdeling voor. Bij $\alpha < 1$ is het gemiddelde van de verdeling onbepaald. Daarnaast geldt dat als $\alpha < 2$ is, de variantie geen eindige waarde bezit, maar naar oneindig zal tenderen indien men het aantal waarnemingen uitbreidt. Men zou de variantie van de steekproef kunnen bepalen voor een toenemend aantal waarnemingen. Indien geldt dat $\alpha = 2$ en er dus sprake is van een normale verdeling, dan zal de waarde van de variantie een tendens vertonen tot stabilisatie, terwijl bij $\alpha < 2$ geldt dat de variantie zal toenemen bij uitbreiding van het aantal waarnemingen.

2.3 Toetsing op de eerste dataset

2.3.1 Inleiding

De eerste dataset bestaat uit duizend dagkoersen van de aandelen Koninklijke Olie, Philips en Unilever. Uit de dagkoersen zijn de rendementen bepaald volgens onderstaande relatie:

$$R_{i,t} = \ln(P_{i,t} + D_{i,t}) - \ln (P_{i,t-1}) \qquad (2.7)$$

waarin: $R_{i,t}$ = rendement behaald met aandeel i gedurende dag t;

$P_{i,t}$ = de koers van het aandeel i op het einde van dag t, gecorrigeerd voor bonusaandelen, stockdividenden, etc. tijdens dag t;

$P_{i,t-1}$ = de koers van aandeel i aan het einde van dag t-1;

$D_{i,t}$ = het contante dividend of andere contante uitkeringen die op het aandeel i op dag t zijn ontvangen.

In dit onderzoek is achtereenvolgens gekeken naar de autocorrelatie tussen opeenvolgende waarnemingen met een "timelag" van één tot tien dagen. Vervolgens is de Student-Range bepaald. Daarna zijn de aandelenrendementen uitgezet in een frequentieverdeling en vergeleken met de normale verdeling. Uitgaande van de Pareto-verdeling is de waarde van de α-factor bepaald. Tevens is gekeken naar het verloop van de variantie bij uitbreiding van het aantal waarnemingen.

2.3.2 De autocorrelatie en de Student-Range

De eerste toets is de bepaling van de seriecorrelatiecoëfficiënt tussen de opeenvolgende rendementen met een "timelag" van één tot tien. (Zie tabel 2.1.)

Tabel 2.1 Seriecorrelatie-coëfficiënten voor een "timelag" van één tot tien dagen.

Timelag	Unilever	Philips	Kon.Olie
1	0,064*	-0,088*	-0,019
2	0,017	-0,004	-0,012
3	0,001	-0,064*	-0,001
4	-0,055	-0,006	-0,021
5	0,005	0,013	-0,043
6	-0,002	-0,039	-0,016
7	-0,041	-0,006	0,015
8	0.018	0,026	-0,002
9	0,053	0,054	0,021
10	-0,011	0,023	-0,047

* significant op het niveau van tweemaal de standaarddeviatie.

Op grond van deze uitkomsten kunnen we de hypothese handhaven dat er geen significante autocorrelatie aanwezig is. Slechts in drie van de dertig gevallen (10%) is er sprake van significante autocorrelatie. Vergelijk Fama (13,3%) en Dorsman en de Gooijer (13,7%).

In tabel 2.2 wordt de frequentieverdeling van de waarnemingen weergegeven. In de eerste kolom van de tabel worden intervallen weergegeven ter grootte van 0,5 maal de standaarddeviatie. In de tweede kolom is dan weergegeven het aantal waarnemingen dat verwacht mag worden bij een normale verdeling. In de volgende kolommen worden het aantal waarnemingen voor respectievelijk de aandelen Koninklijke Olie, Philips en Unilever weergegeven. Het totale aantal waarnemingen bedraagt 1000 per fonds.

Tabel 2.2 De frequentieverdeling.

Interval in aantal malen σ	Normale verdeling	Kon.Olie	Philips	Unilever
< - 3,5	0	2	4	4
- 3,5 tot - 3,0	2	1	0	4
- 3,0 tot - 2,5	5	8	5	8
- 2,5 tot - 2,0	17	10	6	13
- 2,0 tot - 1,5	44	26	26	18
- 1,5 tot - 1,0	92	74	63	54
- 1,0 tot - 0,5	149	141	136	147
- 0,5 tot + 0,5	382	491	519	511
0,5 tot 1,0	149	134	118	125
1,0 tot 1,5	92	55	68	57
1,5 tot 2,0	44	29	28	26
2,0 tot 2,5	17	5	10	13
2,5 tot 3,0	5	10	7	13
3,0 tot 3,5	2	4	3	2
> 3,5	0	10	7	5
Totaal	1000	1000	1000	1000

Indien we tabel 2.2 nader bezien, dan valt een aantal zaken op. Het aantal waarnemingen in de staarten van de verdeling (< -3,5σ en >3,5σ) is bij de aandelen groter dan bij de normale verdeling. Daarnaast geldt dat het aantal waarnemingen rond het gemiddelde (- 0,5σ tot 0,5σ) bij de aandelen groter is. Het gevolg is natuurlijk dat in het middenstuk het aantal waarnemingen bij de normale verdeling groter is. Het aantal waarnemingen onder en boven de middelste klasse bedraagt bij Koninklijke Olie respectievelijk 262 en 247, bij Philips 240 en 241 en bij Unilever 248 en 241. We kunnen hieruit concluderen, dat de verdelingen tamelijk goed symmetrisch zijn. De hypothese dat de verdelingen normaal zijn wordt niet door de cijfers uit tabel 2.2 bevestigd. Eerder moet men daarom denken aan een ander lid uit de verzameling van symmetrische Pareto-verdelingen.

Vervolgens is de waarde van de Student-Range voor de drie aandelen bepaald. Deze bedraagt voor Koninklijke Olie 15,0 voor Philips 14,6 en voor Unilever 12,6. Statistisch gezien moeten we op grond van deze uitkomsten de normaliteitshypothese verwerpen. De waarden zijn te hoog.

Een van de problemen bij het schatten van de karakteristieke coëfficiënt (α) van een Pareto-verdeling is dat men eigenlijk moet weten welke de waarde van α is om, aan de hand van het daarbij behorende kwantiel, een goede schatter te hebben. Daarom is in dit onderzoek voor een aantal kwantielen de schatter bepaald en de daarbij behorende waarde van α berekend. De uitkomsten worden weergegeven in tabel 2.3.

Tabel 2.3 Kwantielschatters (kolommen 2,4 en 6) en de daar bij behorende α-waarden (kolommen 3,5 en 7).

Kwantiel %	Kon.Olie schatter	α	Philips schatter	α	Unilever schatter	α
1	2	3	4	5	6	7
90	1,93	1,6 - 1,7	1,93	1,6 - 1,7	2,21	1,3 - 1,4
92	2,49	1,4 - 1,5	2,21	1,6 - 1,7	2,76	1,2 - 1,3
94	2,29	1,6 - 1,7	2,48	1,6 - 1,7	3,03	1,3 - 1,4
95	2,76	1,6 - 1,7	2,76	1,6 - 1,7	3,31	1,4 - 1,5
96	3,03	1,6 - 1,7	3,03	1,6 - 1,7	3,86	1,4 - 1,5
97	3,03	1,7 - 1,8	3,58	1,5 - 1,6	4,41	1,4 - 1,5

Alle uitkomsten voor de karakteristieke coëfficiënt wijzen in de richting van een waarde voor α kleiner dan twee en dus niet in de richting van normaliteit van de verdeling van de logaritmen uit de aandelenrendementen.

Tenslotte is de variantie voor de aandelen uit deze dataset voor een toenemend aantal waarnemingen bepaald. De uitkomsten zijn weergegeven in tabel 2.4.

Tabel 2.4 Het verloop van de variantie bij een toename van het aantal waarnemingen.

Aantal waarnemingen	Kon.Olie	Philips	Unilever
100	$1,8 \cdot 10^{-5}$	$5,1 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$
1000	$20,0 \cdot 10^{-5}$	$30,8 \cdot 10^{-5}$	$15,6 \cdot 10^{-5}$

Het verloop van de variantie wijst ook niet in de richting van normaliteit, maar meer in de richting van een ander lid van de groep Pareto- verdelingen.

2.4 Toetsing op de tweede dataset

2.4.1 De dataset

De tweede dataset bestaat uit koersen van de aandelen die opgenomen waren in de toenmalige ANP-CBS beursindex. Het betreft 52 fondsen. De beschouwde periode loopt van 2-1-1979 tot 16-12-1981.[2] Zowel voor de daggegevens als voor de weekgegevens waren slotkoersen aanwezig. Voor de weekgegevens betrof dit de slotkoers van de donderdag[3] of, indien er die dag geen beurs was geweest, de slotkoers van de eerste beursdag

2. De daggegevens zijn ons ter beschikking gesteld door het C.B.S. Wij danken de heer drs. E.F. Rietzchel voor zijn bijdrage in het op tape beschikbaar stellen van de dagkoersen. De weekkoersen zijn ontleend aan een eigen databank. Met dank aan vele student-assistenten van de vakgroep Ondernemingsfinanciering te Tilburg, voor de assistentie bij het vele werk voor het verzamelen van de gegevens en de programmatuurontwikkeling.

3. Dit is gedaan om een eventueel "weekend-effekt" te vermijden.

ervoor. Een voordeel van het beschikken over zowel dag- als weekgegevens is, dat we de invloed kunnen nagaan van het meetinterval. Zo zal bij een stabiele Pareto-verdeling de waarde van de factor α niet wijzigen indien we overgaan van dag- naar weekgegevens. Uit deze koersen zijn de rendementen volgens relatie (2.6) berekend.
Ook voor deze data set is een aantal statistische grootheden bepaald teneinde te toetsen of de normale verdeling een goede beschrijving geeft voor de populatie. Achtereenvolgens zijn bepaald: de autocorrelatie, een schatting voor de waarde van α en de Student-Range.

2.4.2 De uitkomsten

Allereerst is voor het onderzoek naar de onafhankelijkheid van de opeenvolgende rendementen gebruik gemaakt van de autocorrelatietoets van Kendall [1968]. Per fonds zijn schattingen berekend met een "lag" van k perioden,waarbij k= 1,2,....,10. In tabel 2.5 is voor de groepen[4] waarin de aandelen zijn onderverdeeld, aangegeven hoe vaak de autocorrelatie coëfficiënt significant van nul verschilt bij een betrouwbaarheid van 5%.

---

4. Om de presentatie in de tabellen overzichtelijk te houden, zijn de aandelen in groepen ingedeeld. De gebruikte groepsindeling is dezelfde als de groepsindeling, die bij de ANP-CBS beursindex gehanteerd wordt.

Tabel 2.5 Het aantal keren dat per groep de autocorrelaties significant van nul verschilt voor zowel dag- als weekgegevens bij een betrouwbaarheid van 5%.

Groep	Aantal fondsen	Daggegevens 1*	Daggegevens 2	weekgegevens 1	weekgegevens 2
Internationals	5	2	50	4	50
Industrie	24	10	240	9	240
Scheep- en Luchtv.	3	0	30	6	30
Bankwezen	4	5	40	3	40
Verzekeringswezen	4	5	40	1	40
Handel en Diversen	12	16	120	22	120
Totaal	52	38	520	45	520

* 1 = aantal keren dat de autocorrelatie coëfficiënt significant van nul verschilt.

2 = het totaal aantal onderzochte autocorrelaties per groep.

Uit tabel 2.5 blijkt dat voor daggegevens 38 van de 520 onderzochte autocorrelaties (7,3%) significant van nul verschillen. Bij weekgegevens is in 45 gevallen (8,7%) sprake van significantie. Wanneer men het aandeel Ogem, dat in de groep Handel en Diversen is opgenomen - gezien de toekomstverwachting van dit concern in de beschouwde periode - even buiten beschouwing laat, dan is bij daggegevens in 29 gevallen (5,7%) de onderzochte autocorrelatie significant van nul verschillend en bij weekgegevens is dit aantal 36 (7,1%). Het geconstateerde aantal significant van nul verschillende autocorrelaties is voor zowel daggegevens als weekgegevens bijzonder laag. Blijkbaar is aan één eis van de normaliteit, onafhankelijkheid van de opeenvolgende rendementen, vrij goed voldaan.

Dat de normaliteit desalniettemin toch verworpen zou moeten worden, blijkt uit de berekening van de Student-Range (SR). De SR van de rendementsverdeling wordt gedefinieerd, zoals reeds eerder is aangegeven, als het verschil tussen het hoogste en het laagste rendement, gedeeld door de standaardafwijking.

In het geval dat de rendementen normaal verdeeld zijn moet de SR tussen bepaalde grenzen liggen. Bij 746 waarnemingen (aantal daggegevens per fonds) geldt dat de nul-hypothese dat de rendementen normaal verdeeld zijn bij onbetrouwbaarheidsdrempel van 5% in ieder geval verworpen dient te worden wanneer SR > 7.80. Bij 156 waarnemingen (aantal weekgegevens per fonds) wordt de nul-hypothese in ieder geval verworpen indien SR > 6.64. Voor daggegevens was voor ieder fonds de SR groter dan 7.80, zodat voor alle fondsen de hypothese van een normale verdeling van de rendementen verworpen moet worden. Bij weekgegevens verwierp de SR-toets de normaliteit voor 36 van de 52 fondsen. Voor de Internationals werd bij weekgegevens alleen voor Hoogovens de normaliteit verworpen.

2.4.3 De Pareto-verdeling

Voor het onderzoek naar de karakteristieke exponent α uit de Pareto-verdeling is een methode gebruikt die iets afwijkt van de door Fama en Roll [1968] aangegeven methode om de parameters van symmetrische stabiele verdelingen te schatten. De door ons gevolgde methode wordt in de appendix aan het einde van dit hoofdstuk beschreven.

In tabel 2.6 wordt voor dag- en weekgegevens van iedere groep het rekenkundig gemiddelde van α, die behoort bij een 95% kwantielschatter, gegeven.

Tabel 2.6 Het rekenkundig gemiddelde van de karakteristieke exponent (bij een 95% kwantielschatter) voor dag- en weekgegevens.

Groep	Aantal fondsen	daggegevens	weekgegevens
Internationals	5	1.63	1.66
Industrie	24	1.54	1.67
Scheep- en Luchtv.	3	1.69	1.80
Bankwezen	4	1.39	1.40
Verzekeringswezen	4	1.58	1.52
Handel en Diversen	12	1.42	1.66
TOTAAL	52	1.52	1.64

Uit tabel 2.6 blijkt dat, wanneer van daggegevens naar week-gegevens wordt overgestapt, de gemiddelde karakteristieke exponent α toeneemt van 1.52 naar 1.64. De ontwikkeling van α is niet voor iedere groep gelijk. Voor Internationals en Bankwezen verandert de α-waarde nauwelijks. De lage waarde van α bij Bankwezen wordt verklaard door de extreem lage waarde die voor Slavenburg wordt gevonden (bij daggegevens $\alpha = 1.15$ en bij weekgegevens $\alpha = 1.13$). De gemiddelde waarde van α voor de overige banken is voor daggegevens 1.54 en voor weekgegevens 1.59. Voor Industrie en voor Handel en Diversen neemt de α toe, wanneer in plaats van daggegevens weekgegevens worden bekeken. De karakteristieke exponent voor Verzekeringswezen laat daarentegen een tegengestelde ontwikkeling zien.

2.5 Een nadere analyse van de uitkomsten

In de vorige twee paragrafen is de rendementsverdeling van aandelen op de Amsterdamse Effectenbeurs onderzocht. Door middel van autocorrelaties werd de onafhankelijkheid van de rendementen onderzocht. In tabel 2.7 wordt een overzicht gegeven van een aantal onderzoekingen.

Tabel 2.7 De autocorrelaties bij een aantal onderzoeken.

Onderzoek	Periode	Interval	Significant	
Fama	1965	dag	41 van 300	13,7 %
Dorsman/de Gooijer	1982	dag	16 van 120	13,3 %
de Gooijer*	1981	dag	11 van 120	9,2 %
1^{ste} dataset	1980	dag	3 van 30	10,0 %
2^{de} dataset	1981	dag	38 van 520	7,3 %
idem excl. Ogem	1981	dag	29 van 510	5,7 %
2^{de} dataset	1981	week	45 van 520	8,7 %
idem excl. Ogem	1981	week	36 van 510	7,1 %

* In dit onderzoek van de Gooijer [1987] gold een timelag van 1 tot 5 dagen en 10 dagen.

Uit de uitkomsten van tabel 2.7 omtrent de autocorrelatie-toets van Kendall blijkt dat de aanname dat de rendementen onafhankelijk verdeeld zijn niet verworpen kan worden. Dit geldt zowel voor de 1000 dagkoersen van de drie aandelen als voor de dag- en weekkoersen van de 52 fondsen. Ook de onderzoeken van andere auteurs voor de Amsterdam Effectenbeurs ondersteunen deze conclusie. Deze conclusie komt overeen met die van Fama [1965] voor de New York Stock Exchange (zie tabel 2.7) en met die van Wouters [1971] en Regidor & Sercu [1976] voor de aandelenmarkt in België. Voor een aantal andere landen in Europa geldt, dat er sprake is van zodanig meer autocorrelatie dat de hypothese van geen autocorrelatie niet ondersteund wordt. Zie onderzoeken van Conrad & Juttner [1973] voor de aandelenmarkt in West-Duitsland, van Jennergren & Korsvold [1975] en Jennergren & Toft-Nielson [1977] voor de markt in de Scandinavische landen, van Papaioannou [1984] voor Griekenland en Uhlir [1979] voor Oostenrijk. West-Duitsland wellicht uitgezonderd betreft het hier kleine

beurzen. Amsterdam vertoont meer het beeld van de grote beurs in Amerika. Voor deze beide beurzen wordt de hypothese dat de opeenvolgende aandelenrendementen onafhankelijk verdeeld zijn niet verworpen.
Vervolgens is met behulp van de SR onderzocht of de rendementen normaal verdeeld zijn. Voor de drie aandelen uit de eerste dataset wordt de hypothese van normaliteit verworpen. Voor de 52 in ons onderzoek betrokken fondsen moet de normaliteit bij daggegevens in alle gevallen worden verworpen. Bij weekgegevens verwerpt de SR de normaliteit voor 36 fondsen.
In de volgende fase van het onderzoek is gekeken of de Pareto-verdeling een goede beschrijving geeft van de rendementsverdelingen van de verschillende fondsen. Voor de drie fondsen ligt de waarde van α bij een kwantielschatter van 96% voor Koninklijke Olie en Unilever tussen 1,6 en 1,7. Voor Philips is dit 1,4 tot 1,5. Bij de gegevens uit de tweede dataset geldt,dat voor daggegevens het rekenkundig gemiddelde van α gelijk aan 1.52 en voor weekgegevens 1.64. Evenals bij de studie van Blattberg en Gonedes [1974] blijkt dat α groter wordt wanneer van daggegevens naar weekgegevens wordt overgestapt. Bekijken wij echter de afzonderlijke groepen dan blijkt dat deze ontwikkeling niet voor alle groepen (in dezelfde mate) geldt en voor de groep verzekeringswezen zelfs tegengesteld is.

In tabel 2.8a en 2.8b wordt de waarde van de in tabel 2.6 voor de dag- en weekgegevens gevonden karakteristieke exponent vergeleken met de waarde van α uit andere studies. Uit tabellen 2.8a en 2.8b blijkt dat van zowel dag- als van weekgegevens de gemiddelde waarde van α vergelijkbaar is met de waarde die voor deze parameter in andere landen gevonden wordt. Bij de door ons gevonden resultaten moeten in ieder geval twee kanttekeningen worden gemaakt. De eerste is dat het aantal waarnemingen voor daggegevens (746) en weekgegevens (156) verschillen. Hierdoor kan een vertekening ontstaan. Een mogelijke oplossing voor dit probleem is de daggegevens te splitsen in vijf groepen met voor iedere groep ongeveer 150 waar-nemingen. Het aantal waarnemingen van de weekgegevens en daggegevens per groep is dan nagenoeg gelijk. Een tweede kanttekening die gemaakt moet worden is dat de gevonden resultaten afhankelijk kunnen zijn van de onderzochte periode. De twee-de oliecrisis in 1979 kan zijn invloed op de koersontwikkeling op de Amsterdamse Effectenbeurs gehad hebben.

Tabel 2.8a De waarde van de karakteristieke exponent bij logaritmen uit de rendementen voor daggegevens.

Auteur	Markt	Aantal fondsen	Periode	α
Blattberg en Gonedes (1974)	NYSE*	30	jan.'56-sept.'62	1.65
Fama (1965)	NYSE	30	jan.'56-sept.'62	1.6
Regidor en Sercu (1976)	Brussel	129	1972-1975	1.5
Tabel 2.5	Amsterdam	52	1979-1981	1.52

* NYSE = New York Stock Exchange

Tabel 2.8b De waarde van de karakteristieke exponent bij logaritmen uit de rendementen van weekgegevens.

Auteur	Markt	Aantal	Periode	α
Blattberg en Gonedes(1974)	NYSE	30	jan.'56-sept.'62	1.72
Praetz (1972)	Sydney	17	1956-1966	1.84
Tabel 2.5	Amsterdam	52	1979-1981	1.64

2.6 Samenvatting en conclusies

In dit hoofdstuk zijn twee onderzoeken weergegeven naar de feitelijke verdeling van de rendementen van aandelen op de Amsterdamse Effectenbeurs. De belangrijke vraag is of de rendementen normaal verdeeld zijn. Indien rendementen normaal verdeeld zijn - en er sprake is van onafhankelijke, identieke verdelingen - kan met behulp van de centrale limietstelling aangetoond worden, dat dan de aandelenkoersen zelf lognormaal verdeeld moeten zijn. Om dit te toetsen, kan een aantal toetsen worden uitgevoerd. De onafhankelijkheid is getoetst door de mate van autocorrelatie tussen de rendementen vast te stellen. Dit is gedaan met een "timelag" van een tot tien dagen.

De normaliteit is op twee manieren getoetst. Allereerst is de Student-Range bepaald. Dit geschiedt door van de waarnemingen het verschil te nemen tussen de grootste en de kleinste uitkomst. Dit verschil moet dan gedeeld worden door de standaarddeviatie van de waarnemingen. Indien de waarde van de Student-Range binnen bepaalde grenzen ligt, wordt de hypothese van normaliteit niet verworpen. Een wat andere weg is uit te gaan van een Stabiele Pareto-verdeling. De normale verdeling is een van de leden van deze familie van verdelingen. Indien we een normale verdeling hebben heeft de karakteristieke coëfficiënt (α) de waarde twee.

Beide onderzoekingen leiden tot de volgende conclusies.
- Er is slechts in een gering aantal gevallen sprake van significante autocorrelatie, zodat de hypothese van onafhankelijkheid niet verworpen wordt.
- De uitkomsten van de SR wijzen in de richting van niet normaal verdeelde rendementen.
- Ook de waarden van de karakteristieke coëfficiënt α van de Stabiele Pareto-verdeling wijst in de richting van niet normaal verdeelde grootheden. De waarde is steeds kleiner dan twee. Bij de overgang van daggegevens naar weekgege-

vens stijgt de waarde van de α-coëfficiënt licht (van 1,52 naar 1,64). Dit zou kunnen duiden op het niet stabiel zijn van de verdeling.

De algemene conclusie luidt: de hypothese, dat de verdeling van de rendementen (log)normaal is, moeten we op statistische gronden verwerpen. Wel blijkt dat de verdeling van de weekgegevens de tendens heeft meer bij normaliteit te behoren dan de verdeling van de daggegevens. Dit blijkt onder andere uit het feit, dat de SR bij weekgegevens niet steeds buiten de grenzen voor normaliteit valt, terwijl dit bij daggegevens steeds het geval is. Daarnaast is de waarde van α van de Pareto-verdeling bij weekgegevens hoger dan bij daggegevens. De verdeling van de weekgegevens is "normaler" dan die van daggegevens.

Ondanks het niet normaal zijn van de verdeling van de rendementen, zal in de rest van deze studie toch uitgegaan worden van normaliteit. De verdeling is dan wel niet normaal volgens de statistische toetsen, maar wijkt niet zover af van normaliteit. De financieringstheorie is voor een groot deel gebaseerd op de aanname van normaliteit. De "economische" voordelen van normaliteit zijn waarschijnlijk veel groter dan de nadelen die de statistiek ons levert. Een model van de werkelijkheid zal nooit de werkelijkheid volledig beschrijven, het blijft een afbeelding daarvan. Toch is zo'n model wel bruikbaar indien het redelijk goed de werkelijkheid beschrijft of voorspelt. De verzuchting van Fama [1976] is hier op zijn plaats: "We can live with the small observed departures from normality in returns at least until better models come along".

Appendix

De bepaling van de schatter van de α-coëfficiënt van een Stabiele Pareto-verdeling.

In dit onderzoek is gewerkt met een schatter, zoals deze beschreven is door Fama en Roll (1968). Bij de berekening is echter een wat andere (eenvoudiger) procedure gevolgd.
Deze procedure is door ons afgeleid. Fama en Roll gaan als volgt te werk:

1. rangschik de n waarnemingen op grootte, $x_1, \ldots\ldots, x_n$
2. bereken δ = gemiddelde van de middelste $\frac{1}{2}$ n waarnemingen
3. stel de cumulatieve verdeling op
4. bereken $c = \dfrac{0.72 \text{ kwantiel} - 0.28 \text{ kwantiel}}{2 \bullet 0.827}$
5. standaardiseer de oorspronkelijke rij uit $u_i = \dfrac{x_i - \delta}{c}$
6. schatter is dan $z_f = \dfrac{u_f - u_{1-f}}{2c} = 0.827 \cdot \dfrac{u_f - u_{1-f}}{x_{0.72} - x_{0.28}}$
   waarin f = f_{de} kwantiel.

Wij hebben de volgende procedure gehanteerd:
1. rangschik de n waarnemingen op grootte;
2. verdeel de rij in een aantal klassen, bijvoorbeeld m stuks van gelijke klassenbreedte, nummer de klassen 1 tot en met m en stel de cumulatieve verdeling op;
3. de schatter is nu

$$z_f = 0.827 \bullet \frac{A - B}{C - D}$$

waarin:
A = het nummer van de klasse waarin 0.95 zich bevindt;
B = het nummer van de klasse waarin 0.05 zich bevindt;
C = het nummer van de klasse waarin 0.72 zich bevindt;

HOOFDSTUK 3 DE MARKTPORTEFEUILLE

3.1 Inleiding

Zoals reeds eerder is aangegeven, wordt in deze studie onder andere gebruik gemaakt van de uitkomsten van de CAPM-theorie. Binnen deze theorie speelt het verwachte rendement van de marktportefeuille een belangrijke rol. Vaak wordt deze marktportefeuille benaderd met behulp van een marktindex. Deze marktindex moet, wil deze de gehele markt weergeven, gewogen worden samengesteld. Weging dient plaats te vinden met de marktwaarde van de diverse vermogenscomponenten. Het blijkt dat er aan deze ogenschijnlijk eenvoudige benadering een aantal haken en ogen kleeft. Daarom wordt in dit hoofdstuk aandacht geschonken aan indexcijfers, hierna indices genoemd.

3.2 Het samenstellen van indices

3.2.1 Inleiding

Met behulp van indexcijfers probeert men ofwel het verloop van tijdreeksen weer te geven, waarbij het gegeven van de basisperiode op 100 wordt gesteld. Een andere mogelijkheid is dat men geografische vergelijkingen probeert te maken, waarbij het gegeven van één gebied op 100 wordt gesteld. Wanneer een index betrekking heeft op één variabele dan wordt dit een enkelvoudige index of een partiële index genoemd. De enkelvoudige index wordt vaak uitgedrukt als een percentage van de waarde in het basisjaar.

$$i_a(t)=\frac{x_a(t)}{x_a(o)} \cdot 100\% \qquad (3.1)$$

waarin: $i_a(t)$ = de enkelvoudige index a op tijdstip t;
$x_a(t)$ = de waarde van a op tijdstip t;

$x_a(o)$ = de waarde van a op tijdstip o (het basisjaar).

Daarnaast onderscheidt men samengestelde indices, die betrekking hebben op een combinatie van variabelen. De formule van een samengestelde index luidt:

$$I(t) = \frac{w_a i_a(t)}{som(w_a)} \qquad (3.2)$$

waarin : $I(t)$ = de samengestelde index op tijdstip t;

w_a = de wegingscoëfficiënt behorende bij variabele a;

som(.) = de sommatie van de variabele.

Een probleem bij het gebruik van samengestelde indices is de bepaling van de wegingscoëfficiënten. Wanneer de wegingscoëfficiënten van alle n variabelen gelijk zijn, dan geldt $w_a=1/n$ voor iedere variabele a. Men zegt dan dat de index ongewogen is samengesteld. In alle andere gevallen, waarbij geldt dat de wegingscoëfficiënten niet aan elkaar gelijk zijn, is er sprake van een gewogen samengestelde index.

Voor de verschillende effectenbeurzen zijn indices ontwikkeld. Met behulp van deze indices poogt men de koersontwikkeling op de desbetreffende effectenbeurzen te beschrijven. Om verschillende redenen bestaat een behoefte aan een dergelijke beschrijving. Zo is het bij het bestaan van een index voor de koersontwikkeling mogelijk het resultaat van een effectenportefeuille met het gemiddelde resultaat op de beurs, gemeten door middel van de index, te vergelijken. Voorts kan een vergelijking worden gemaakt tussen enerzijds de koersbeweging van de markt als geheel en anderzijds bepaalde variabelen, zoals inflatie en geldhoeveelheid. Tenslotte kan nog de moderne portefeuille theorie genoemd worden, waarin een marktindex onmisbaar is.

3.2.2 Data en indeling van het onderzoek

In dit onderzoek zijn de dagelijkse en de wekelijkse slotkoersen van de 52 in de ANP-CBS index voorkomende fondsen gebruikt. Voor de weekkoersen zijn de slotkoersen van donderdag genomen. De beschouwde periode loopt van 01-01-1975 tot 16-12-1981. De rendementen worden in dit onderzoek als volgt gedefinieerd:

$$R_{i,t} = \ln(P_{i,t} + D_{i,t}) - \ln (P_{i,t-1}) \qquad (3.3)$$

waarin: $P_{i,t}$ = de koers van aandeel i aan het eind van periode t, gecorrigeerd voor bonusuitkeringen, stockdividenden, split-ups, etc.;

$P_{i,t-1}$ = de koers van aandeel i aan het eind van periode t-1;

$D_{i,t}$ = het contante dividend dat op aandeel i in periode is ontvangen.

Voor een rechtvaardiging van het gebruik van de eerste verschillen van de logaritmen van de koersen volstaan wij hier met te verwijzen naar Fama ([1965], blz. 45-46) en Granger en Morgenstern ([1970], blz. 107-108) en naar hoofdstuk 2 van deze studie.

Zoals reeds vermeld, brengt het kiezen van een geschikte marktindex een aantal problemen met zich mee. Deze problemen worden in paragraaf 3.2.3. besproken. Er bestaat een grote verscheidenheid in de samenstelling van indices. Deze verschillen zullen in paragraaf 3.2.4. door middel van een bespreking van een aantal Amerikaanse indices naar voren worden gebracht. Hierbij is gebruik gemaakt van Latané en Tuttle ([1970], hoofdstuk 7).

Voor de Amsterdamse Effectenbeurs zijn twee marktindices ontwikkeld, te weten de ANP-CBS beursindex en de beurswaarde-

index. In paragraaf 3.2.5 wordt van deze indices een beschrijving gegeven. Ook treft men in deze paragraaf aan, waarvoor deze indices gebruikt worden en welke bezwaren eraan kleven. In paragraaf 3.3 wordt dan een nieuwe marktindex, de Tilburg-Amsterdam Marktindex, hierna genoemd de TAM, geïntroduceerd. Ook van deze index zal eerst een beschrijving worden gegeven en vervolgens zal op de gebruiksmogelijkheden en de nadelen worden ingegaan.
Een toepassingsgebied van de index vindt men in de beleggingsleer. Daarbij wordt veelal verondersteld, dat de reeks van rendementen behaald met een portefeuille zoals de marktindex onderling onafhankelijk en normaal verdeeld is. In paragraaf 3.4 wordt eerst de relatie tussen de beleggingsleer en de marktindex beknopt uiteengezet. Daarna wordt een aantal eigenschappen van de TAM besproken. In deze paragraaf vindt er een vergelijking plaats tussen de TAM en andere marktindices voor de Amsterdamse Effectenbeurs. In paragraaf 3.5 tenslotte treft men een samenvatting aan, alsmede enkele conclusies waartoe ons onderzoek naar de marktindices heeft geleid.

3.2.3 Problemen bij de constructie van een marktindex

Lorie & Hamilton ([1973], blz. 52-59) onderscheiden drie hobbels die bij de constructie van indices genomen moeten worden, te weten:

1. verzamelen
2. wegen
3. middelen

Ad 1 Verzamelen

Het probleem van het verzamelen bestaat uit de selectie van fondsen, die in de index zullen worden opgenomen. De bekendste index, de Dow Jones Industrial Index, bestond bijvoorbeeld bij de eerste publikatie in 1884 uit slechts 11 fondsen. Dit aantal is uitgegroeid tot de huidige omvang van 30 fondsen. Het aantal fondsen dat men in de index opneemt, stel n, hangt voornamelijk van twee factoren af. De eerste factor is het toenemende rekenwerk bij een toename van n. De tweede factor is dat bij een toename van n een "zuiverder" beeld van de markt wordt verkregen. In eerste instantie legde de eerste factor een beperking op aan het aantal in de index op te nemen fondsen. Door de opkomst van de computer is het rekenwerk nu geen handicap meer. Voor de twee grootste Amerikaanse effectenbeurzen, de New York Stock Exchange en de American Stock Exchange, zijn daarom al indices ontwikkeld die alle op de beurs genoteerde aandelen omvatten.

Ad 2 **Wegen**

Bij het samenstellen van een index kan men de daarvoor in aanmerking komende fondsen ongewogen danwel gewogen opnemen. In het eerste geval wordt ervan uitgegaan dat in ieder fonds evenveel geïnvesteerd wordt. In het tweede geval daarentegen is het uitgangspunt dat de investeringen in de op te nemen fondsen niet gelijk verdeeld zijn. Wanneer de fondsen gewogen in de index worden opgenomen, dan zullen meestal de beurswaarden van de desbetreffende fondsen als wegingscoëfficiënten dienst doen. In de praktijk komt men vele vormen van weging tegen. Zo worden bij het bepalen van de Dow Jones Industrial Index de koersen bij elkaar opgeteld. Ook dit is een vorm van weging, waarbij de koershoogten als wegingscoëfficiënten gebruikt worden.

Op het eerste gezicht lijkt een gewogen index, waarbij de wegingscoëfficiënten gebaseerd zijn op de beurswaarden, te prefereren. Men bedenke daarbij wel dat bij het gebruik van een dergelijke index de kans bestaat dat er een onzuiverheid binnensluipt. Een fonds, waarvan de koers relatief daalt over de periode (t-1, t) wordt gewogen tegen de beurswaarde op tijdstip t-1. Dit is de (hoge) beurswaarde vóór een daling. Bij een relatieve koersstijging van een fonds weegt men met de lage beurswaarde aan het begin van de periode. Een naar beurswaarde gewogen index zal dientengevolge in perioden van stijging een naar beneden gerichte onzuiverheid met zich dragen. Omdat perioden van stijgingen afgewisseld worden met perioden van dalingen, zal de index na verloop van enige tijd steeds een naar beneden gerichte onzuiverheid met zich dragen.

Ad 3 **Middelen**

In de meeste gevallen gebruikt men voor het middelen het rekenkundig gemiddelde of het geometrisch (ook wel meetkundig) gemiddelde. De NYSE indices, Standard & Poor indices, Dow Jones Averages en de American Stock Exchange Index zijn gebaseerd op het rekenkundig gemiddelde van koersen of koersveranderingen. De Value Line Index daarentegen is op het geometrisch gemiddelde gebaseerd. Zowel het rekenkundig gemiddelde als het geometrisch gemiddelde zijn niet zuiver. Het rekenkundig gemiddelde heeft de neiging meer dan het eigenlijk gemiddelde aan te geven, terwijl het geometrisch gemiddelde onder het werkelijke gemiddelde uitkomt. Wanneer de koersreeks laat zien: 100-200-100, dan is het eerste rendement + 100% en het tweede -50%. Het rekenkundig gemiddelde per periode is dan +25%, ondanks dat de koers weer gelijk is aan die van het begin van de periode. Bij het geometrisch gemiddelde is het berekenen van dit gemiddelde erg gevoelig voor fondsen die een naar nul tenderende koers hebben. Fischer [1966] heeft dit probleem als volgt opgelost. Hij berekende over de periode 1926-1960 voor de NYSE een rekenkundig (Fischer's arithmetric index) en een geometrisch (Fischer's geometric index) index van ongewogen relatieve koersveranderingen. Daarna berekende Fischer een gecombineerde index, die voor 56% uit de rekenkundig en voor 44% uit de geometrisch index bestaat. Deze percentages zijn zo gekozen, dat de mogelijke onzuiverheid minimaal is. Ter verduidelijking wordt in tabel 3.1. een voorbeeld uitgewerkt, dat aan Lorie & Hamilton [1973] is ontleend.

Tabel 3.1 Indices die gebaseerd zijn op rekenkundig en geometrisch gemiddelden van aandelenkoersen.

Aandeel	Basis	Periode 1	Periode 2	Periode 3	Periode 4
x	\$ 10	\$ 12	\$ 15	\$ 10	\$ 6
y	\$ 10	\$ 15	\$ 20	\$ 15	\$ 2
z	\$ 10	\$ 21	\$ 31	\$ 8	\$ 4
Gemiddelde:					
rekenkundig	\$ 10	\$ 16	\$ 22	\$ 11	\$ 4
geometrisch	\$ 10	\$ 15,6	\$ 21	\$ 10,6	\$ 3,6
Index					
rekenkundig	100	160	220	110	40
geometrisch	100	156	210	106	36

Uit tabel 3.1 blijkt dat in dit voorbeeld de index gebaseerd op het geometrisch gemiddelde langzamer toeneemt en sneller daalt dan de index die gebaseerd is op het rekenkundig gemiddelde.

3.2.4 De Amerikaanse indices

Nadat in paragraaf 3.2.3 summier de problemen die bij de constructie van een index voorkomen zijn besproken, zal in deze paragraaf op de samenstelling van de Amerikaanse indices worden ingegaan. Daarbij zullen wij veel gebruik maken van hoofdstuk 7, getiteld "Market Averages and Portfolio Performance" van Latané & Tuttle [1970]. In dit hoofdstuk bespreken zij de belangrijkste beursindices uit de Verenigde Staten, die zij als volgt groeperen:

I. Buy and hold policy

A. Gemiddelde koersniveau indices
ongewogen rekenkundig gemiddelde: Dow Jones Averages en Amex Stocks

B. Geaggregeerde marktwaarde indices
1. gewogen rekenkundig gemiddelde: Moody's Averages
2. gewogen rekenkundige index nummers: S & P indices en NYSE indices

II. Portfolio reallocation policy

A. Periodieke portefeuille herallocatie: United Press International Market Indicator en Average Investment-Performance index

B. Continue portefeuille herallocatie: Value Line index

Bij de indices die vallen onder groep I (Buy and Hold Policy), wordt op een bepaald moment de portefeuille vastgesteld en vinden daarna in deze portefeuille alleen correcties plaats op grond van uitkeringen. Bij de tweede categorie indices, die zijn opgenomen onder Portfolio reallocation policy, wordt iedere keer dat de desbetreffende index wordt berekend de portefeuille opnieuw samengesteld. Wij zullen hier enkele van de genoemde indices bespreken.

Dow Jones Indices

Dow Jones & Co. publiceren een, deler-gecorrigeerde, ongewogen rekenkundig gemiddelde van de aandelenkoersen van 30 industriële ondernemingen, 20 transportondernemingen en 15 nutsbedrijven. Ook wordt voor ieder van deze drie groepen afzonderlijk een index samengesteld. De bekendste index is de Dow Jones Industrial Averages, die hierna kortweg de Dow Jones index wordt genoemd. Bij de Dow Jones index worden de koersen bij elkaar opgeteld en door een getal (de deler) gedeeld. Deze deler was oorspronkelijk 30 (gelijk aan het aantal fondsen), maar is nu door correcties teruggebracht tot minder dan 2. Deze correcties vinden plaats wanneer een onderneming een stockdividend van 10% of meer geeft of de aandelen splitst. Ter verduidelijking geven wij het volgende voorbeeld. Stel dat een index wordt samengesteld uit de aandelen van twee ondernemingen, A (koers = 100) en B (koers = 300). De index is dan:

$$\frac{100 + 300}{2} = 200$$

Indien nu A de aandelen splitst en wel zodanig dat op ieder oud aandeel een nieuw aandeel wordt verstrekt, dan wordt de beurskoers van A 50. Nu wordt de deler zodanig aangepast dat er op het moment van correctie geen wijziging in de index optreedt. Dat betekent dat moet gelden:

$$\frac{50 + 300}{d} = 200 \text{ , zodat } d = \frac{350}{200} = 1{,}75$$

Bij deze delercorrectie doen zich twee nadelen voor. Ten eerste worden stockdividenden van kleiner dan 10% buiten beschouwing gelaten en ten tweede worden ondernemingen die frequent grote stockdividenden geven of aandelensplitsingen doorvoeren steeds minder zwaar gewogen in vergelijking tot ondernemingen waarbij dergelijke uitgifte van nieuwe aandelen niet plaats vindt.

Moody's Averages

Deze index wordt sinds 1929 maandelijks bijgehouden. Het is een gewogen rekenkundige index, waarbij de wegingscoëfficiënten worden berekend aan de hand van het werkelijke en het oorspronkelijke (op 01-01-1929) aantal uitstaande aandelen.

$$Im\ (t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i(t)\ Q_i(t)}{\Sigma\ Q_i(o)}$$

waarin: $Im(t)$ = Moody's Average Index op tijdstip t;

N = het aantal in de index voorkomende fondsen;

$P_i\ (t)$ = de koers van fonds i op tijdstip t;

$Q_i\ (t)$ = het aantal uitstaande aandelen van fonds i op tijdstip t;

$Q_i\ (o)$ = het aantal uitstaande aandelen van fonds i op het oorspronkelijke tijdstip o.

Standard & Poor's indices

De Standard & Poor indices, hierna genoemd S&P indices, worden sinds 1923 berekend. De meest bekende S&P index is de S&P 500, die bestaat uit 425 industriële ondernemingen, 20 spoorwegmaatschappijen en 55 nutsbedrijven. De S&P indices worden op bijna dezelfde manier samengesteld als de Moody's Averages, alleen wordt in de noemer van de index de marktwaarde op t=o opgenomen.
De formule luidt:

$$I_{S\&P\ 500}\ (t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i(t)\ Q_i(t)}{\sum_{i=1}^{N} P_i(o) Qi(o)} \cdot 10 \qquad (3.5)$$

waarin: $I_{S\&P\ 500}\ (t)$ = Standard & Poor index op tijdstip t;

$P_i(o)$ = de koers van fonds i op t = o;

t=o = is de basisperiode 1941-1943, zodat $\sum_{i=1}^{N} P_i(o) Q_i(o)$ de gemiddelde marktwaarde van het pakket in de basisperiode is.

De gemiddelde geaggregeerde marktwaarde gedurende de periode 1941-1943 is arbitrair gesteld op het indexgetal 10. Vandaar dat de factor 10 in bovenstaande formule is opgenomen.

United Press International Market Indicator

De United Press International Market Indicator, hierna genoemd UPI Market Indicator, is een index waarvan de portefeuille aan het eind van iedere transactiedag opnieuw wordt samengesteld. De index heeft als basis 1 april 1966, en deze is gesteld op 100.

$$I_{upi}\ (T) \quad \prod_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i\ (t)\ /\ P_i\ (t-1)}{N} \cdot 100 \qquad (3.6)$$

waarin: N = het aantal aandelen in de index;
$P_i(t)$ = de koers van aandeel i op tijdstip t;
T = het aantal transactiedagen sinds 1-4-1966;
π = het product van.

De index laat zich gemakkelijk berekenen door gebruik te maken van de volgende relatie:

$$I_{upi}\ (T) = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i(T)\ /\ P_i(T-1)}{N} \cdot I_{upi}\ (T-1) \qquad (3.7)$$

De correctie voor stockdividenden en splitsingen vindt plaats door de prijs uit de vorige periode aan te passen. Aan het gebruik van de UPI Market Indicator kleeft een tweetal bezwaren. Ten eerste heeft de keuze van de lengte van de periode (dag, week etc.) invloed op de index. Ten tweede worden prijsstijgingen zwaarder gewogen dan prijsdalingen.

Value Line

De laatste te bespreken index is de Value Line. Het basistijdstip is 30 juni 1961, met als basiswaarde 100. De Value Line bestaat uit 1400 fondsen, waarvan 1212 industriële ondernemingen, 34 spoorwegmaatschappijen, en 154 utilities. De Value Line is de enige van de hier besproken indices die gebaseerd is op het geometrisch gemiddelde.

In formule is de weergave:

$$I_{VL}(T) = \prod_{t=1}^{T} \prod_{i=1}^{N} P_i(t)/P_i(t-1)^{1/N} \cdot 100 \qquad (3.8)$$

waarin: N = het aantal fondsen in de index,
$P_i(t)$ = de koers van aandeel i op tijdstip t,
T = het aantal transactiedagen sinds 30-6-1961.

Op dezelfde wijze als de UPI Market Indicator laat ook deze index zich gemakkelijk berekenen door gebruik te maken van de volgende relatie:

$$I_{VL}(T) = \prod_{i=1}^{N} P_i(T)/P_i(T-1)^{1/N} \cdot I_{VL}(T-1) \qquad (3.9)$$

In de Value Line zijn de aandelen ongewogen opgenomen. Voorts blijkt, zie paragraaf 3.2.3, dat deze index een negatieve afwijking vertoont, omdat een geometrische gemiddelde wordt berekend.

3.2.5 De indices op de Amsterdamse Effectenbeurs

In deze paragraaf zullen de twee bestaande marktindices[5] voor de Amsterdamse Effectenbeurs worden besproken. Daartoe zal van beide indices eerst een beschrijving worden gegeven. Bij iedere index zal worden aangegeven, waarvoor deze wordt gebruikt en welke nadelen aan het gebruik van de desbetreffende index verbonden zijn.

De ANP-CBS beursindex

Voor de Amsterdamse Effectenbeurs wordt sinds 1 april 1955 door het Centraal Bureau voor de Statistiek (C.B.S.), in samenwerking met het Algemeen Nederlands Persbureau (A.N.P.) en de Vereniging voor de Effectenhandel, een index voor de

5. Dit was de situatie eind 1986. Momenteel bestaan de stemmingsindex (zie Rietzschel [1987]), de beleggingsindex en de koersindex. Daarnaast heeft de European Options Exchange een eigen index.

koersen van aandelen berekend die bekend staat als de ANP-CBS beursindex (ook wel beursindex algemeen genoemd). Voor de berekening van de beursindex algemeen worden ongeveer 50 van de grootste aan de beurs genoteerde Nederlandse ondernemingen onderverdeeld in zes groepen. In elke groep zijn die fondsen bijeengebracht die representatief geacht worden voor de koersontwikkeling in de desbetreffende groep. Deze groepen zijn:

- Internationals
- Industrie
- Scheep- en Luchtvaart
- Bankwezen
- Verzekeringswezen
- Handel en Diversen

Per groep wordt het ongewogen gemiddelde van de koersen bepaald en uitgedrukt in procenten van het corresponderende jaargemiddelde in een basisjaar. Met ingang van 2 januari 1975 is het basisjaar verschoven van 1963 naar 1970. De beursindex algemeen wordt verkregen door het gewogen gemiddelde van de zes groepsindices te nemen. De wegingsfactoren zijn ontleend aan de reële omzetten ter beurze in 1970 van alle gewogen aandelen. In tabel 3.2 zijn de wegingsfactoren met basisjaar 1963 en met basisjaar 1970 opgenomen.

Tabel 3.2 De wegingsfactoren met basisjaar 1963 en 1970.

Groep	Basisjaar 1963	Basisjaar 1970
Internationals	40	48
Industrie	36	39
Scheep- en Luchtvaart	3	4
Bankwezen	5	5
Verzekeringswezen		1
Handel + Diversen	16	3

Sinds 1 maart 1978 wordt ook een beursindex algemeen-lokaal bijgehouden. Bij de samenstelling van deze index is de groep Internationals uitgezonderd. De beursindex algemeen-lokaal wordt op dezelfde manier berekend als de beursindex algemeen. De berekeningen van de beursindices worden gecorrigeerd voor kapitaalmutaties, zoals emissie, bonusaandelen en stockdividend, en uitkeringen in contanten overeenkomstig de aanwijzingen van de Vereniging van Beleggingsanalysten (Zie Boissevain en Van Doorn,[1977]). De beursindices worden vanaf de dag waarop het contante dividend wordt uitgekeerd over een aantal beursdagen gecorrigeerd. De lengte van de correctieperiode is per groep verschillend en varieert tussen de 50 en 200 dagen. De ANP-CBS beursindex is geschikt voor korte termijn analyse. Het is een index die de stemming op de beurs weergeeft. Voor lange termijn analyse is deze index niet geschikt. Een tweetal argumenten kan daarvoor worden aangevoerd. Ten eerste kan de wijze van correctie voor uitkeringen de index op lange termijn verkeerd beïnvloeden. Ten tweede is de methode van weging ongelukkig. De groepsindices zijn ongewogen samengesteld. Ieder aandeel binnen een groep weegt dus even zwaar mee. De groepsindex is in formulevorm:

$$I\,g(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i(t)}{N} \qquad (3.10)$$

Fondsen met een hoge koers tellen dus zwaarder mee. De nadelen die gelden voor de, in paragraaf 3.2.4 besproken, Dow Jones Index gelden dus ook hier. Voorts worden voor de berekening van de index algemeen de groepen gewogen opgenomen, waarbij als wegingscoëfficiënten de reële omzetten ter beurze van iedere groep uit 1970 worden gebruikt. In de loop der tijd kunnen de verhouding tussen de reële omzetten van de groepen onderling veranderen. Hiermee wordt bij de berekening van de index geen rekening gehouden.

De beurswaarde-index

Voor de berekening van de beurswaarde-index "algemeen" worden alle ondernemingen waarvan de aandelen op de courante markt genoteerd worden in zes groepen ingedeeld, te weten:

- Internationals;
- Handel, Industrie en Diversen;
- Scheep- en Luchtvaart;
- Bank-, Krediet- en Verzekeringswezen;
- Beleggingsmaatschappijen;
- Overigen.

Per groep wordt eerst de beurswaarde van iedere onderneming bepaald. Dit is de beurskoers van de onderneming vermenigvuldigd met het aantal uitstaande aandelen van de desbetreffende onderneming. Daarna worden van alle ondernemingen binnen een groep de beurswaarden opgeteld. De beurswaarde-index algemeen omvat de volledige zes groepen, terwijl bij de samenstelling van de beurswaarde-index lokaal de groepen Internationals en Beleggingsmaatschappijen worden uitgezonderd. Bij de berekening van de beurswaarde-index moet de toeneming van de beurswaarde als gevolg van fusies of het aantrekken van nieuw vermogen worden geëlimineerd; deze toeneming wordt in het algemeen gelijkgesteld aan de geldstroom naar of van de ondernemingen.
Rietzschel [1983] geeft aan welke regels het C.B.S. hanteert om de beurswaarde op tijdstip t, het moment van beurswaardemutatie, te corrigeren. Deze regels worden hieronder kort weergegeven.

1. Bij een openbare (claim-) emissie neemt de beurswaarde theoretisch toe met het gevraagde nieuwe vermogen; dat wil zeggen: de beurswaarde op tijdstip t moet worden verminderd met de toeneming van het aandelenkapitaal, gewaardeerd tegen de emissiekoers.

2. Bij een onderhandse plaatsing van aandelen wordt aangenomen, dat deze nieuwe aandelen geplaatst werden tegen de vigerende beurskoers zodat de beurswaarde hierdoor geacht wordt te zijn toegenomen met het vermoedelijk gevraagde vermogen, dat wil zeggen dat de beurswaarde op het tijdstip t moet worden verminderd met de toeneming van het aandelenkapitaal gewaardeerd tegen de huidige koers.
3. De uitgifte van gratis aandelen, als alternatief voor een contant dividend, wordt gelijkgesteld met een fictieve claimemissie, de emissiekoers kan eenvoudig uit de uitkeringspercentages worden afgeleid.
4. Bij de conversie van obligaties in aandelen wordt de beurswaarde op het tijdstip t verminderd met de toeneming van het aandelenkapitaal, gewaardeerd tegen de conversiekoers.
5. Bij fusies wordt de beurswaarde op het tijdstip t doorgaans verminderd met de toeneming van het aandelenkapitaal, gewaardeerd tegen de huidige beurskoers.
6. Bij de introductie van een nieuw fonds wordt de beurswaarde op het tijdstip t verminderd met de totale waarde van de onderneming.

De beurswaarde-index is in vergelijking met de ANP-CBS beursindex meer geschikt voor lange termijn beschouwingen. Ook bij het gebruik van de beurswaarde-index kan een aantal kanttekeningen worden geplaatst. Rietzschel ([1983], blz. 28) somt de volgende nadelen op.

1. De weging met het uitstaande aandelenkapitaal is, althans voor de situatie in Nederland, niet bevredigend. Dit geldt met name en in het bijzonder voor Koninklijke Olie; de beurswaarde van dit fonds bedroeg per ultimo 1982 ongeveer 25 miljard gulden, dat was 68% van de beurswaarde van de groep internationals en 45% van de totale beurswaarde van alle ter beurze genoteerde Nederlandse gewone aandelen (exclusief beleggingsmaatschappijen).

2. De gebezigde groepsindeling der aandelen is nog weinig bruikbaar en behoeft enige aanpassing.
3. Weliswaar worden in de berekening van de beurswaarde-index alle aandelen betrokken, waarmee dit cijfer de portefeuillegedachte zeer dicht benadert, doch daar staat tegenover dat ook veel stille fondsen in de berekening worden meegenomen, zoals Bank Mendes Gans, Verenigde Trans-Atlantische Hypotheekbank in liquidatie, etc.

Voorts merkt Rietzschel ([1983], blz. 20) op dat bij de weging voor een marktindex rekening moet worden gehouden met:

1. Het aantal aandelen dat (nagenoeg) permanent in het buitenland verblijft.
2. Het aantal aandelen dat zich in vaste handen bevindt.

De correctie van de marktindex voor deze twee punten kan alleen dan geschieden, wanneer hierover redelijk betrouwbare gegevens beschikbaar zijn.
Tenslotte willen wij twee onderzoekingen, (Fase [1976] en Eijgenhuijsen [1978]), naar de geschiktheid van de ANP-CBS beursindex algemeen als indicator voor het beursgebeuren niet ongenoemd laten. Eerstgenoemde auteur maakte daarbij gebruik van de principale componentenanalyse, terwijl de tweede auteur de factoranalyse toepast. Het belangrijkste verschil tussen deze twee analyses is, dat in het geval van de factoranalyse wordt verondersteld dat iedere variabele een gedeelte "eigen" variantie bezit die niet door een gemeenschappelijke factor wordt gegenereerd, terwijl bij de principale componentenanalyse deze veronderstelling niet wordt gemaakt. Eijgenhuijsen [1978] houdt zich meer bezig met de groepsindeling van de ANP-CBS index algemeen en komt tot de conclusie dat Hoogovens buiten de groep Internationals valt en dat KLM niet bij Scheepvaart fondsen maar bij de Internationals had moeten worden ingedeeld. Fase echter kijkt naar de index algemeen zonder zich te bekommeren over de groepsindeling. Deze auteur komt tot de conclusie dat voor het be-

schrijven van het koersverloop op korte termijn de keuze van een gewogen index niet erg veel verschil oplevert met het gebruiken van een simpele ongewogen index.

3.3 De nieuwe marktindex

3.3.1 Inleiding

Zoals in paragraaf 3.2.5 al uiteengezet is, kleeft er een aantal bezwaren aan het hanteren van de ANP-CBS index en de beurswaarde-index als marktindices. De ANP-CBS index is niet geschikt voor een lange termijn analyse, terwijl bij de beurswaarde index geen correctie voor onder andere contante dividenden plaats vindt. De nieuwe indices, de Tilburg-Amsterdam Marktindex (hierna genoemd de TAM) en de TAM-O (Tilburg-Amsterdam Marktindex-Ongewogen), pogen aan deze bezwaren tegemoet te komen. In de TAM zijn die fondsen opgenomen die ook deel uitmaken van de ANP-CBS beursindex. De beurswaarde van de in de TAM opgenomen fondsen was op 01-01-1979 74% en op 31-12-1981 76% van de totale beurswaarde van alle courante fondsen die op de Amsterdamse Effectenbeurs verhandeld werden. Wanneer de beleggingsmaatschappijen buiten beschouwing blijven, dan nemen deze percentages toe tot 88 respectievelijk 92.

In deze paragraaf zal eerst een beschrijving van de constructie van de TAM worden gegeven. Vervolgens geven wij enkele toepassingsmogelijkheden van de nieuwe index aan. Evenals bij het gebruik van de andere indices kleeft ook aan het gebruik van de TAM een aantal nadelen. Op deze nadelen wordt aan het eind van deze paragraaf ingegaan. De TAM bestaat uit de gewogen rendementen van 52 fondsen. Als wegingscoëfficiënten fungeren de beurswaarden van de opgenomen fondsen. De gebruikte rendementen zijn de logaritmen uit de rendementen, zoals in paragraaf 1.2 gedefinieerd.

Bij de TAM zijn de beurswaarden van de fondsen en dus ook de wegingscoëfficiënten van de in de index opgenomen fondsen, niet constant. Wel is de samenstelling constant voor wat betreft het aantal aandelen. Wordt de reeds eerder vermelde index-groepering van Latané en Young [1969] gevolgd dan behoort de TAM tot de categorie van "buy and hold" indices.

Vergelijken wij de TAM met de ANP-CBS beursindex en de beurswaarde-index, dan kan een aantal opmerkingen worden gemaakt. Ten eerste is de weging van de in de TAM opgenomen fondsen theoretisch beter onderbouwd dan bij de ANP-CBS beursindex het geval is. In de theoretische modellen van de prijsvorming, die bij het onderzoek naar de koersontwikkelingen op de effectenbeurzen worden gebruikt (onder andere het marktmodel), wordt verondersteld dat de marktportefeuille gewogen wordt samengesteld. Hieraan voldoet de TAM beter dan de ANP-CBS beursindex. Voorts kan worden opgemerkt dat de verwerking van uitkeringen in de rendementsberekeningen bij de TAM beter is dan bij de andere twee indices. Naast de TAM is nog een ongewogen index, de TAM-0, geconstrueerd. De constructie van deze index is dezelfde als die van de TAM, met dien verstande dat bij de TAM-0 de wegingscoëfficiënten gelijk worden verondersteld. Bij de TAM-0 wordt uitgegaan van een constante samenstelling van de index voor wat betreft het bedrag dat in ieder fonds is belegd. Het is daardoor een "portfolio reallocation policy". Tenslotte moet nog vermeld worden dat de bij de TAM en de TAM-0 gebruikte indeling in groepen dezelfde is als de groepsindex bij de ANP-CBS beursindex.

3.3.2 Toepassingen van de nieuwe indices

Een van de toepassingsgebieden van de nieuwe index is te vinden in de beleggingsanalyse. Een adequate rol in de beleggingsanalyse is voor de TAM alleen weggelegd wanneer de TAM en de rendementsverdeling van de TAM, gedefinieerd door:
$R(t) = \ln TAM(t) - \ln TAM(t-1)$, aan een aantal voorwaarden voldoet. In deze paragraaf zal eerst de mogelijke plaats van

de TAM in de beleggingsanalyse worden aangegeven. Daarna zullen enkele eigenschappen van de TAM worden besproken.

Nadat Markowitz [1952, 1959] in de beleggingsanalyse naast de verwachte waarde het risico in de beschouwing betrok, is er in de financieringstheorie veel aandacht besteed aan de efficiënte-markthypothese. Deze hypothese houdt in dat alle relevante informatie in de koersen van de aandelen is verwerkt en dat het niet mogelijk is om met behulp van verworven informatie systematisch een beter resultaat dan de markt te behalen. Fama [1970] onderscheidde daarbij drie varianten, te weten de zwakke, de semi-stringente en de stringente variant. De zwakke variant houdt in dat uit het koersgedrag in het verleden geen informatie gehaald kan worden die relevant is voor de koersontwikkeling in de toekomst. Volgens de tweede variant, de semi stringente, is het niet mogelijk om met behulp van gepubliceerde informatie een systematisch winstgevende strategie te construeren. Wanneer de stringente variant opgaat is het zelfs voor insiders niet mogelijk om hun voorinformatie op een winstgevende wijze aan te wenden.

Het onderzoek naar de zwakke variant kan op twee manieren geschieden. Ten eerste is het mogelijk om door middel van statistische analyses te onderzoeken of er een verband bestaat tussen de opeenvolgende koersmutaties. Voor de Amsterdamse Effectenbeurs konden Solnik [1973], Dorsman en De Gooijer [1982] een dergelijk verband niet aantonen. De tweede manier is om te onderzoeken of door middel van het toepassen van een beleggingsstrategie een beter resultaat kan worden behaald dan door toepassing van de passieve strategie (buy-and-hold strategie). Onder de passieve strategie verstaat men het kopen en vasthouden van de in het onderzoek betrokken aandelen. Ankum en Dorsman [1983,1987] onderzochten enkele strategieën, maar ook hier werd de zwakke variant van de efficiënte markthypothese niet verworpen. Bij het toetsen van de zwakke variant worden voorspellingen die gedaan worden aan de hand van gegevens over koersen en rendementen uit het verleden op winstgevendheid onderzocht. Men kan dan volstaan met het vergelijken van de gerealiseerde uitkomst met de daarbij behorende uitkomst van de passieve strategie of met het onderzoeken naar een statistisch verband tussen de opeenvolgende koersmutaties.

Bij de semi-stringente variant moet daarentegen de koersontwikkeling van een fonds na het bekend worden van relevante informatie (bijvoorbeeld een winstaankondiging) vergeleken worden met de koersontwikkeling die zou hebben plaatsgevonden, indien de desbetreffende informatie niet zou zijn verstrekt. Door middel van een theoretisch model, bijvoorbeeld het marktmodel, wordt nu deze laatste koersontwikkeling gesimuleerd. Ook bij het onderzoek naar de stringente variant is een theoretisch model nodig. In de theoretische modellen van de prijsvorming, die voor bovenstaande simulaties worden gebruikt, wordt er een relatie gelegd tussen het rendement van fonds i over periode t ($R_{i,t}$) en het marktrendement over periode t ($R_{M,t}$). Zo luidt het marktmodel:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{M,t} + e_{i,t} \tag{3.11}$$

waarin: $R_{i,t}$ = het rendement van fonds i over periode t;
$R_{M,t}$ = het rendement van de marktportefeuille over periode t;
$e_{i,t}$ = de storingsterm behorende bij fonds i over periode t;
α_i en β_i = parameters.

Voor onderzoek naar de semi-stringente en de stringente variant is het van belang dat het marktrendement over periode t bepaald kan worden. Het is voor de bepaling van $R_{M,t}$ noodzakelijk dat er een marktindex bestaat die de koersontwikkeling op de beurs op een adequate manier beschrijft. Hiervoor is de TAM ontworpen.

3.4 Eigenschappen van de TAM

3.4.1 De autocorrelaties, de Student-Range en het gemiddelde rendement

In hoofdstuk twee hebben wij per groep waarin de fondsen zijn onderverdeeld vermeld in welke frequentie de autocorrelatie coëfficiënten r(k) significant van nul verschilden bij $\alpha = 5\%$. Hier is r(k) de correlatie coëfficiënt met een "lag" k (k=1,2,......,10). Bij weekgegevens was in 45 gevallen sprake van significantie. Wanneer het aandeel Ogem, gezien de toenmalige toekomstverwachtingen, buiten beschouwing werd gelaten zou het aantal significant van nul verschillende autocorrelaties dalen tot 36. Onderzoeken we nu de rendementen van de TAM en van de daarbij behorende groepsindices, dan blijkt voor k = 1, 2, ···,···, 10 voor de TAM de gevonden autocorrelaties 2 keer (voor k = 9 en k = 10) significant van nul te verschillen. Bij de groepsindices werden alleen voor de groep Internationals en de groep Verzekeringswezen significante autocorrelaties gevonden. Bij beide groepen was dat het geval voor k = 6, 8, 9 en 10. Opgemerkt zij dat voor k = 7 geen enkele onderzochte autocorrelatie significant van nul verschillend was. Betwijfeld kan worden of de op statistische wijze gevonden significante autocorrelaties een economische betekenis hebben. Wij concluderen dan ook dat van zowel de TAM als van de daarbij behorende groepsindices de rendementen onafhankelijk zijn. Een aanwijzing of de rendementen normaal verdeeld zijn kan worden verkregen door middel van de Student-Range (SR).

Zoals reeds eerder aangegeven is, vormt de SR van een verdeling het verschil tussen de hoogste en de laagste waarneming gedeeld door de standaardafwijking. De SR is een zeer grove toets aangezien van de beschouwde verdeling slechts twee rendementen worden gebruikt. De SR verwerpt voor de rendementen van de TAM de hypothese dat deze rendementen normaal verdeeld zijn. Behalve van de groep Handel en Diversen ver-

werpt deze toets ook de normaliteit van de bij de TAM behorende groepsindices.
Voordat de mogelijkheid wordt besproken of de rendementen Pareto verdeeld zijn, presenteren wij in tabel 3.3 het gemiddelde rendement van de TAM en de daarbij behorende groepsindices voor de periode 1975-1981 op weekbasis en op jaarbasis, alsmede de variantie van deze rendementen op weekbasis.

Uit tabel 3.3 blijkt dat op jaarbasis voor de periode 1975-1981 het gemiddelde rendement van de TAM 13,3 bedraagt. De gemiddelde rendementen op jaarbasis van de bij de TAM behorende groepsindices verschillen over de periode van -6,4% voor de groep Handel tot 17,4% voor de groep Internationals.

Tabel 3.3 Het gemiddelde en de variantie voor de groepen.

Index	Gemiddeld rendement weekbasis	Gemiddeld rendement jaarbasis	Variantie weekbasis
Internationals	0,0031	17,4	0,0006
Industrie	-0,0005	-2,6	0,0005
Scheep- en Luchtvaart	0,0013	7,0	0,0008
Bankwezen	0,0017	9,2	0,0005
Verzekeringswezen	0,0029	16,3	0,0005
Handel en Diversen	-0,0012	-6,4	0,0005
TAM	0,0024	13,3	0,0004

Ook de groep Industrie geeft over de beschouwde periode een negatieve rendementsontwikkeling te zien. Het hoge gemiddelde jaarlijkse rendement van de TAM is voor een groot deel te danken aan de goede koersperformance (gecorrigeerd voor dividenden e.d.) van Koninklijke Olie en in iets mindere mate van Unilever.

3.4.2 De verdeling van het marktrendement

In deze paragraaf zal onderzocht worden of het marktrendement zich gedraagt volgens een normale verdeling met behulp van de meer algemene Pareto-verdeling. In hoofdstuk twee is reeds een aantal eigenschappen van deze verdeling weergegeven. Aangezien de normale verdeling een Stabiele Pareto-verdeling is, kan het onderzoek naar de rendementsverdeling van de TAM (en de deelindices) nu als volgt worden aangepakt. Berekend is de karakteristieke exponent α uit de Pareto-verdeling voor de desbetreffende rendementsverdeling. Zoals reeds eerder is aangegeven geldt dat, als $\alpha = 2$, de onderzochte rendementen normaal verdeeld zijn. Indien een andere waarde van α gevonden wordt, dan kan de verdeling toch stabiel zijn. Er moet dan gelden dat de voor daggegevens en voor weekgegevens gevonden karakteristieke exponent dezelfde waarde aanneemt.

In tabel 3.4 zijn voor de TAM, de TAM-O en de ANP-CBS indices de α-waarden berekend. Dit zowel voor de gehele groep als voor de subindices per groep.

Tabel 3.4 De karakteristieke exponent bij een 95% kwantielschatter voor de gewogen, ongewogen en de ANP-CBS indices.

Index	Aantal	TAM	TAM-0	ANP-CBS
Internationals	5	1,74	1,70	1,72
Industrie	24	1,73	*	1,62
Scheep- en Luchtvaart	3	1,81	1,82	1,95
Bankwezen	4	1,80	1,92	*
Verzekeringswezen	4	1,61	1,79	1,71
Handel en Diversen	12	1,79	1,80	1,88
Totale Groep	52	1,57	1,72	1,57

* niet gedefinieerd

Uit tabel 3.4 blijkt dat de waarden van α voor de totale groep voor de TAM en de ANP-CBS beursindex gelijk zijn aan 1,57, terwijl de waarde voor de TAM-O hoger is namelijk 1,72. Voor de deelindices geldt dat de hoogste waarde behaald wordt door de groep Scheep- en Luchtvaart bij de ANP-CBS beursindex. De verdeling van de TAM-O als totale groep wijkt blijkbaar het minst af van de normale verdeling.

Voor de periode 1975/1981 zijn voor de TAM, de TAM-0 en de ANP-CBS beursindex de correlatiecoëfficiënten bepaald om de samenhang te bezien tussen de drie indices. Deze correlatiecoëfficiënten zijn in tabel 3.5 weergegeven.

Tabel 3.5 De correlatie-coëfficiënten tussen de TAM, de TAM-0 en de ANP-CBS beursindex en de daarvan afgeleide groepsindices.

	TAM/ANP-CBS	TAM/TAM-0	TAM-0/CBS
Internationals	0,541	0,732	0,863
Industrie	0,964	0,952	0,965
Scheep- en Luchtvaart	0,873	0,948	0,898
Bankwezen	0,875	0,957	0,962
Verzekeringswezen	0,991	0,997	0,995
Handel en Diversen	0,954	0,936	0,969
Totale Groep	0,165	0,688	0,893

Uit tabel 3.5 blijkt dat de correlatiecoëfficiënt tussen de TAM en de ANP-CBS beursindex voor de totale groep slechts 0,165 bedraagt. De van de groepindices berekende correlatiecoëfficiënt zijn echter hoger en variëren van 0,541 (Internationals) tot 0,991 (Verzekeringswezen).
Ook voor de TAM en de TAM-0 alsmede van de TAM-0 en de ANP-CBS beursindex blijken, op een uitzondering na, de correlatiecoëfficiënten van de "totale indices" kleiner te zijn dan die van de groepsindices. Opvallend is voorts de hoge waarde

die voor de correlatiecoëfficiënt van de groep Verzekeringswezen wordt gevonden. De fondsen uit deze groep lieten in de periode 1975/1981 een betrekkelijk uniforme koersontwikkeling zien.

3.5 Samenvatting en conclusies

In dit hoofdstuk zijn een tweetal nieuwe indices voor de Amsterdamse Effectenbeurs beschreven. Voordat de beschrijving plaats vond, is eerst aangegeven waarom men indices ontwikkelt en welke problemen zich voordoen bij de constructie van een index voor een aandelenmarkt. Vervolgens zijn enkele indices die in de Verenigde Staten worden gebruikt besproken.

In paragraaf 3.2 zijn de twee bestaande marktindices van de Nederlandse markt, de ANP-CBS beursindex en de beurswaarde-index, onderwerp van studie geweest. Na van beide indices de constructie te hebben uiteengezet, is ook ingegaan op de nadelen, die verbonden zijn aan het gebruik van deze indices als marktindex. De beschrijving van de nieuwe marktindex, de TAM (de Tilburg Amsterdam Marktindex), vond in de daaropvolgende paragraaf plaats. Naast de TAM, een naar beurswaarde gewogen index, is ook een ongewogen index, de TAM-0 geconstrueerd. Ook aan deze indices kleven bezwaren. Een van de bezwaren richt zich op het feit dat de TAM een neiging heeft tot daling. Dit komt door de wijze van meten zoals beschreven in par. 3.3. Uit nader onderzoek blijkt echter dat in "normale" situaties de aldus ontstane fout zeer gering is. Alleen in "laboratoriumsituaties" geeft dit wezenlijke problemen. Economische eisen die men kan stellen aan indices zijn ons inziens belangrijker dan statistische eisen.

Bij de TAM is de samenstelling van de portefeuille constant qua aantal aandelen. Daar de prijs van de aandelen steeds wijzigt verandert wel steeds het totale bedrag dat in ieder aandeel afzonderlijk is belegd. Wat de totale waarde betreft, verandert de portefeuille samenstelling steeds. De TAM is een voorbeeld van een "buy-and-hold" politiek.

In paragraaf 3.4. zijn enkele eigenschappen van de TAM onderzocht. Zo is gekeken naar de autocorrelatie en de verdeling van de rendementen. Geconstateerd moet worden, dat de verdeling van de rendementen van de TAM, als ook van de groepsindices, afwijken van de Pareto-verdeling (en dus ook van een normale verdeling). De afwijking is echter zodanig klein dat ook hier uitgegaan kan worden van normaliteit.

In paragraaf 3.4.1 is ingegaan op de correlaties tussen de TAM, de TAM-0 en de ANP-CBS beursindex. De correlatiecoëfficiënt van de TAM en de ANP-CBS beursindex bleek het laagst en die tussen de TAM-0 en ANP-CBS beursindex het hoogst. De weging die bij de ANP-CBS beursindex wordt toegepast, vertoont meer overeenkomst met de TAM-0 (de ongewogen index) dan met de TAM (de gewogen index). Zo weegt in de ANP-CBS index Koninklijke Olie voor ongeveer 10% mee en bij de TAM-0 is dit percentage 2.
In de TAM echter speelt Koninklijke Olie een veel belangrijker rol, omdat de beurswaarde daarvan ongeveer de helft van de beurswaarde van de beschouwde 52 fondsen bedraagt.

HOOFDSTUK 4 BETA'S VAN NEDERLANDSE AANDELEN

4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt aandacht geschonken aan de bèta (β) als risicomaatstaf. Samen met het verwachte rendement van de marktportefeuille uit hoofdstuk 3 en de risicovrije interestvoet is het mogelijk om het verwachte rendement van een aandeel vast te stellen. Allereerst worden de waarden van de bèta's van Nederlandse aandelen weergegeven. Als marktindex kan men daarbij de TAM gebruiken. Dit wordt vermeld in paragraaf 2. Daarnaast is het echter ook mogelijk om de TAM-O te gebruiken als (ongewogen) marktindex. In paragraaf 3 worden daarom de waarden van de bèta's gegeven gebaseerd op de ongewogen index. Van belang is de vraag of de β-waarden stationair en stabiel zijn. Dit is het onderwerp van paragraaf 4. In paragraaf 5 wordt de voorspelbaarheid van bèta's onder de loupe genomen.

4.2 De bèta's van Nederlandse aandelen

4.2.1 Inleiding

Zoals in hoofdstuk 1 reeds ter sprake kwam, neemt in de moderne financieringstheorie het marktmodel een belangrijke plaats in. Dit model luidt in formulevorm (zie relatie 3.11):

$$R_{j,t} = \alpha_j + \beta_j R_{M,t} + e_{j,t} \qquad (4.1)$$

waarin: $R_{j,t}$ = rendement aandeel j in periode t;
$R_{M,t}$ = rendement marktportefeuille in periode t;
$e_{j,t}$ = storingsterm in periode t;
α_j en β_j = parameters.

Voorwaarde voor de bruikbaarheid van het marktmodel voor het onderzoek naar bijvoorbeeld de efficiënte-markt hypothese is dat de bèta stabiel en stationair is. Dit geldt natuurlijk ook voor een reeks van andere onderzoekingen. In het kader van deze studie is het van belang dat de bèta stabiel en stationair is om deze factor te mogen gebruiken bij het voorspellen van de verwachte waarde van de toekomstige verdeling ven de aandelenrendementen. In navolging van Altman, Jacquillat & Levasseur ([1974], blz. 1496) wordt een parameter stabiel genoemd wanneer deze onafhankelijk is van het gebruikte berekeningsinterval (dag, week) binnen één en dezelfde periode. Met andere woorden: onder de stationariteit van een parameter wordt verstaan de onafhankelijkheid met betrekking tot de beschouwde periode. De stabiliteit van de bèta kunnen we toetsen door de bèta's op dag- en op weekbasis te bepalen; het toetsen van de stationairiteit kan geschieden door meerdere perioden te beschouwen.

Indien de bèta's van aandelen niet stationair zijn betekent dit dat de beslisser niet alleen te maken heeft met onzekerheid omtrent het te behalen rendement, maar ook met onzekerheid betreffende het toekomstige risiconiveau van iedere aandelenbelegging. Van belang daarbij is de mogelijkheid om de bèta goed te kunnen voorspellen. Naarmate de voorspellingsfouten kleiner zijn kan de beslisser met meer zekerheid het toekomstige niveau van zijn portefeuille bepalen en is hij beter in staat het (onzekere) toekomstige rendement tegen het (te voorspellen) risico af te zetten en op die wijze het niveau te bepalen van de verwachte koers.

4.2.2 De TAM en bèta's.

In deze subparagraaf worden waarden gegeven van de bèta's van Nederlandse fondsen. Het betreft hier de 52 fondsen, die in de beschouwde periode opgenomen waren in de ANP-CBS beursindex. De waarde van de bèta's is bepaald met de TAM als een naar beurswaarde gewogen marktindex. De bèta's zijn hier zowel op weekbasis als op dagbasis berekend. De databank met weekgegevens loopt vanaf 1975. De bèta's zijn zowel per jaar van 1975 tot en met 1981 als voor de gehele periode bepaald. De databank met daggegevens begint in 1979. Daarom zijn voor daggegevens bèta's berekend voor de periode 1979-1981 en voor de afzonderlijke jaren. In tabel 4.1 worden de bèta's voor de weekgegevens weergegeven. Per subgroep van de index wordt steeds een ongewogen gemiddelde van de bèta's van de fondsen van de subgroep gegeven.

Tabel 4.1 De bèta's, gebaseerd op weekgegevens, van de 52 fondsen uit de ANP-CBS beursindex voor de periode 1975 - 1981 en voor de jaren afzonderlijk. TAM als marktindex.

Fonds	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1975-1981
Intern.	1,05	1,18	1,15	1,24	0,99	0,85	0,68	0,97
AKZO	1,33	1,39	1,43	1,71	0,97*	0,85	0,10	1,01
Hoogovens	0,84	1,16	1,06	1,46	1,01	0,76	0,47	0,87
Kon. Olie	1,34	1,11*	1,08	1,09	1,24	1,32	1,59*	1,31
Philips	0,94	1,21	1,42	1,19	0,75	0,65	0,58	0,88
Unilever	0,81	1,01	0,77	0,75	0,97	0,67	0,66	0,80
Sch./Lucht	0,67	0,82	0,75	1,33	0,74	0,57	0,59	0,71
Nedlloyd	0,69	0,42	0,51	0,80	0,87	0,33	0,43	0,53
v.Ommeren	0,57	0,64	0,77	1,66	0,26*	0,79	0,48	0,66
KLM	0,76	1,41	0,96	1,52	1,09	0,59	0,87	0,94
Bankw.	0,81	0,60	0,46	0,48	0,54	0,50	0,22	0,52
ABN	0,61	0,70	0,40	0,50	0,52	0,70	0,22	0,55
AMRO	1,00	0,47*	0,58	0,69	0,70	0,45	0,25	0,60
NMB	0,83	0,63	0,40	0,24	0,72	0,54	0,23	0,56
Slavenburg	0,46	0,46	0,12	0,64	0,22	0,31	0,16	0,36

Tabel 4.1 Vervolg

Fonds	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1975-1981
Verz.wezen	0,44	0,58	0,69	0,94	0,72	0,57	0,15	0,51
Amev	0,58	0,73	0,77	1,06	0,99	0,90	0,02*	0,64
Amfas	0,18	0,46	0,75	1,24	0,59*	0,36	0,37	0,44
Ennia	0,21	0,48	0,49	0,63	0,65	0,44	0,07*	0,36
Nat.Ned.	0,79	0,63	0,76	0,81	0,64	0,58	0,14	0,60
Industrie	0,71	0,79	0,82	1,00	0,85	0,58	0,33	0,66
ACF	0,31	0,51	0,50	1,01	0,47	0,81	0,33	0,53
v.Berkel	0,74	0,67	0,12	0,99	0,55	0,97	1,11	0,80
Bols	0,75	0,75	2,13	1,04*	0,68	0,55	0,60	0,76
Bos Kalis	0,80	0,55	0,52	0,99	0,74	0,85	0,14*	0,65
Bredero	1,07	0.68	0,79	1,06	0,65	1,19	0,43*	0,85
Buhrmann-T	0,62	0,40	0,62	0,79	0,42	0,71	0,36	0,55
Caland H.	0,51	0,60	1,15	0,73	1,41	0,53	0,23	0,59
Desseaux	0,84	0,80	1,15	0,61	0,08	0,07	-0,19	0,44
Fokker	0,82	0,57	0,54	0,45	0,76	0,27	0,50	0,58
Gamma	0,29	0,86	-0,16	1,04	0,85	0,45	0,29	0,49
Gist-Br.	0,78	0,87	1,21	0,87	1,56	0,97	0,31	0,84
Heineken	0,92	0,88	1,04	0,99	0,96	0,58	0,32	0,76
Holec	0,92	0,97	0,87	1,46	1,98	0,65*	0,13	0,84
HBG	0,80	0,48	0,98	0,72	0,76	0,26	-0,05	0,49
Meneba	0,73	0,77	0,30	1,85*	0,51	0,51	0,11	0,62
Naarden	1,20	1,34	1,49	1,34	1,66	0,36	0,66	1,01
Nijverdal	0,42	0,90	1,13	1,61	0,78	0,41	0,06	0,56
Nutricia	0,33	0,60	0,69	0,91	0,43	1,00	0,38	0,59
Oce-v.d.Gr.	1,01	0,66	0,71	0,87	0,88	0.77	0.04	0.69
RSV	0,72	1,24	1,08	1,16	0,84	0,82	0,63	0,87
Tw.Kabel	0,49	0,93	0,16	0,17	0,17	-0,05	0,20	0,33
VMF	0,59	0,97	1,01	1,96	1,52	0,47	0,73	0,85
Wessanen	0,56	0,81	0,95	0,34	0,72	0,39	0,42	0,56

Tabel 4.1 Vervolg

Handel/Div.	0,69	0,68	0,72	0,95	0,81	0,63	0,17	0,61
Ahold	0,93	0,77	0,79	0,97	0,65	0,30	0,20	0,63
Ceteco	0,78	0,54	0,68	0,80	0,59	0,74	0,46	0,64
Deli	0,51	0,29	0,23	0,84	0,35	0,42	0,56	0,45
Hagemeyer	1,13	0,82	0,34	0,96	2,11	0,79	0,44	0,89
Intern.M.	0,68	1,07	1,13	0,83	1,23	0,82	0,25	0,75
Kluwer	0,57	0,43	0,48	1,10	1,16	0,42*	0,02	0,49
KBB	0,71	0,47	0,61	0,80	0,51	0,82	-0,53	0,47
OGEM	0,63	0,91	1,04	1,06	0,19	0,74	0,72	0,73
Pakhoed	0,61	0,90	1,80	2,06	1,56	0,76	0,80	0,96
Pont	0,63	0,48	0,42	0,50	0,46	0,10	-0,27	0,30
VNU	0,70	0,81	0,75	0,92	0,82	0,53	0,40	0,66
Wyers	0,38	0,61	0,31	0,51	0,14	1,10	-1.05	0,29

* betekent dat de desbetreffende bèta significant (bij een onbetrouwbaarheid van 5 %) verschillend is van de bèta uit het voorafgaande jaar.

Uit tabel 4.1 blijkt dat er in zeven gevallen sprake is van een negatieve waarde voor de bèta. Dit betreft in 1977 Gamma, in 1980 Twentsche Kabel en in 1981 Desseaux, HBG, KBB, Pont en Wyers. Dit betekent dat 1,4% (7/520) van de geschatte jaarlijkse bèta's op weekbasis negatief is. Dit komt overeen met de resultaten van Levy [1971]. Deze auteur vond voor de New York Stock Exchange dat 1,7% (83/5000) van de geschatte bèta's een negatieve waarde had. Altman, Jacquillat en Levasseur [1974] vonden voor de aandelenmarkt in Frankrijk bij 7,7% (194/2528) van de geschatte waarde van de bèta's een negatieve uitkomst.

Indien we de waarde van de afzonderlijke bèta's bezien valt vooral de lage waarde voor de meeste bèta's op in het jaar 1981. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat juist in dat jaar de waarde van de bèta van Koninklijke Olie zeer hoog is

(1,59) en omdat het gewogen gemiddelde van alle bèta's, gewogen met de beurswaarde, gelijk aan één moet zijn.

In tabel 4.2 wordt voor het ongewogen gemiddelde van de groepen de hoogste en de laagste waarde en de waarde voor de gehele periode weergegeven. Tevens wordt per groep aangegeven hoe vaak er sprake is van significante verschillen tussen opeenvolgende jaarbèta's

Tabel 4.2 De hoogste, de laagste, de gemiddelde en de bèta voor de gehele periode per groep.

Groep	hoogste	laagste	gemid.	periode	significant
Internationals	1,24	0,68	0,96	0,97	8,6 %
Sch. en Luchtv.	1,33	0,59	0,96	0,71	4,8 %
Bankw.	0,81	0,22	0,52	0,52	3,6 %
Verz.wezen	0,94	0,15	0,55	0,51	10,7 %
Industrie	1,00	0,33	0,67	0,66	4,2 %
Handel en Div.	0,95	0,17	0,56	0,61	1,2 %
Totale groep	0,99	0,32	0,66	0,66	4,4 %

Uit tabel 4.2 zien we dat de hoogste groepswaarde te vinden is bij de groep Scheep- en Luchtvaart, gevolgd door de Internationals. De laagste waarde treffen we aan bij de groep Verzekeringswezen, gevolgd door de groep Handel en Diversen. Het gemiddelde is berekend als de som van de hoogste en de laagste waarde gedeeld door twee. We zien dat dit gemiddelde in de buurt ligt van de waarde van de bèta berekend over de gehele periode. Bezien we de waarden van de bèta's per groep, berekend over de gehele periode, dan blijkt de groep Internationals de hoogste waarde te bezitten, terwijl de groep Verzekeringswezen de laagste waarde heeft.
Bezien we de afzonderlijke bèta's dan blijken deze in de afzonderlijke jaren te schommelen tussen - 1,05 (Wyers 1981)

en 2,13 (Bols 1977). Voor de totale periode schommelen de bèta's tussen 0,29 (Wyers) en 1,31 (Koninklijke Olie).

Het aantal bèta's dat significant verschilt ten opzichte van het jaar ervoor blijkt procentueel het hoogst bij de groep Verzekeringswezen (10,7%) en het laagst voor de groep Handel en Diversen (1,2%). Voor de totale groep geldt dat in 4,4% van de gevallen er sprake is van significante afwijkingen in opeenvolgende jaren.

Ook voor daggegevens hebben we schattingen gemaakt van de bèta's. De periode hierbij loopt vanaf 1979 tot 1981. In tabel 4.3 worden de waarde van de geschatte bèta's weergegeven, zowel per jaar als voor de gehele periode. Tevens worden waarden weergegeven voor de dezelfde periode op weekbasis.

Tabel 4.3 De bèta's per groep en per fonds gebaseerd op daggegevens van 52 fondsen, berekend voor de periode 1979-1982 en voor de afzonderlijke jaren, alsmede voor de periode 1979-1982 op basis van weekgegevens. TAM als marktindex.

Fonds	1979	1980	1981	1979-1981 dag	1979-1981 week
Internationals	1,16	0,88	0,96	0,96	0,80
AKZO	1,49	0,88*	0,88	0,98	0,57
Hoogovens	1,54	0,89*	0,87	0,99	0,67
Kon. Olie	1,17	1,37*	1,45	1,37	1,41
Philips	0,91	0,70*	0,92*	0,83	0,61
Unilever	0,69	0,55*	0,67	0,63	0,72
Sch-/L.vaart	1,01	0,69	0,85	0,82	0,60
Nedlloyd	0,82	0,53	0,49	0,56	0,46
v.Ommeren	0,89	0,61	0,64	0,67	0,58
KLM	1,33	0.93*	1,43*	1,22	0,76

Tabel 4.3 Vervolg

Fonds	1979	1980	1981	1979-1981 dag	1979-1981 week
Bankwezen	0,42	0,45	0,38	0,42	0,40
ABN	0,42	0,59	0,28	0,42	0,48
AMRO	0,66	0,58	0,42	0,52	0,41
NMB	0,43	0,44	0,23*	0,35	0,46
Slavenburg	0,16	0,20	0,60*	0,37	0,26
Verz. wezen	0,48	0,44	0,23	0,36	0,44
Amev	0,54	0,53	0.18*	0,38	0,58
Amfas	0,44	0,41	0,27	0,35	0,42
Ennia	0,49	0,40	0,20*	0,33	0,34
Nat.Ned.	0,44	0,41	0,28*	0,36	0,43
Industrie	0,70	0,51	0,42	0,50	0,53
ACF	0,42	0,56	0,50	0,51	0,56
v.Berkel	0,44	0,57	0,67	0,55	0,94
Bols	0,70	0,49	0,52	0,54	0,58
Bos Kalis	0,62	0,55	0,43	0,51	0,56
Bredero	0,50	0,60	0,27*	0,44	0,80
Buhrmann-T.	0,60	0,42	0,24	0,37	0,54
Caland Hold.	0,87	0,56	0,72	0,68	0,57
Desseaux	0,27	0,25	0,14	0,20	- 0,03
Fokker	0,51	0,27	0,56	0,44	0,46
Gamma	0,86	0,29*	0,29	0,39	0,46
Gist-Brocades	1,16	0,73*	0,53	0,72	0,83
Heineken	0,80	0,99	0,72	0,84	0,55
Holec	0,99	0,76	0,45	0,66	0,68
HBG	0,61	0,45	0,18*	0,36	0,23
KNP	0,87	0,44	0,30	0,45	0,29
Meneba	0,43	0,37	0,48	0,43	0,35
Naarden	1,39	0,43*	0,55	0,65	0,71
Nijverdal	0,53	0,38	0,16	0,31	0,31
Nutricia	0,53	0,83	0,43	0,60	0,66

Tabel 4.3 Vervolg

Fonds	1979	1980	1981	1979-1981 dag	1979-1981 week
Oce v.d.Gr.	0,52	0,46	0,54	0,50	0,51
RSV	1,37	0,96	0,39	0,78	0,76
Tw. Kabel	- 0,10	0,04	- 0,00*	- 0,00	0,09
VMF	1,04	0,41*	0,61	0.61	0,75
Wessanen	0,75	0,46	0,30	0,44	0,46
Handel en div.	0,67	0,55	0,36	0,49	0,48
Ahold	0,69	0,59	0,44	0,54	0,33
Ceteco	0,34	0,51	0,51	0,48	0,59
Deli	0,53	0,53	0,46	0,50	0,45
Hagemeyer	1,38	0,66	0,46	0,69	0,89
Intern.Muller	0,72	0,64	0,48	0,58	0,66
Kluwer	0,52	0,46	0,13*	0,32	0,41
KBB	0,54	0,52	0,08*	0,33	0,25
OGEM	0,78	0,59	0,49	0,58	0,64
Pakhoed	1,59	0,76*	0,88	0,96	0,90
Pont	0,22	0,33	0,10	0,21	0,01
VNU	0,63	0,54	0,29*	0,45	0,54
Weyers	0,07	0,50	0,04	0,22	0,10

* betekent, dat de desbetreffende bèta significant (bij een betrouwbaarheid van 95%) verschillend is van de bèta uit het voorafgaande jaar.

Uit tabel 4.3 blijkt dat met uitzondering van slechts twee gevallen de bèta steeds positief is. De uitzondering betreft Twentsche Kabel in 1979 (-0,10) en in 1981 (-0,00). Dit wil dan zeggen dat in 1,3% van de gevallen de bèta negatief is, terwijl bij weekgegevens in dezelfde periode sprake is van zes negatieve waarden (3,8%). De waarden van de afzonderlijke bèta's schommelen tussen -0,10 (Twentsche Kabel 1979) en 1,59 (Pakhoed 1979).

In tabel 4.4 worden voor de groepen de hoogste, de laagste en de gemiddelde waarde gegeven, alsmede de waarde berekend over de gehele periode per dag en per week.

Tabel 4.4 De waarde van de groepsbèta's, hoogste, laagste, gemiddelde en de waarde over de gehele periode op dag- en weekbasis.

groep	hoogste	laagste	gemiddelde	periode dag	periode week
Internationals	1,16	0,88	1,02	0,96	0,80
Sch.en Luchtv.	1,01	0,69	0,85	0,82	0,60
Bankwezen	0,45	0,38	0,42	0,42	0,40
Verz.wezen	0,48	0,23	0,36	0,36	0,44
Industrie	0,70	0,42	0,56	0,50	0,53
Handel en Div.	0,67	0,36	0,52	0,49	0,48

De hoogste groepswaarde treffen we aan bij de Internationals (1,16) gevolgd door de groep Scheep- en Luchtvaart (1,01), de laagste bij de groep Verzekeringswezen (0,23), gevolgd door de groep ~~Bankwezen.~~ Handel en Div. Bezien we de gehele periode, dan vinden we ook hier de hoogste waarde bij de Internationals (0,96), ge-volgd door de groep Scheep- en Luchtvaart (~~0,60~~ 0,82) en de laagste bij de groep Verzekeringwezen (0,36), gevolgd door de groep Bankwezen (0,42). Voor de gehele periode op weekbasis geldt ook dat de hoogste waarde bereikt wordt bij de Internationals (0,80), gevolgd door de groep Scheep- en Luchtvaart (0,60), maar hier wordt de laagste niet bij de Verzekeringswezen (0,44) maar bij het Bankwezen (0,40) aangetroffen.
In tabel 4.2 werden de waarden weergegeven voor de periode 1975-1981 berekend op weekgegevens. Per jaar gezien zijn in die tabel de hoogste groepen ook de Internationals (1,24) en Scheep- en Luchtvaart (1,33) zij het in omgekeerde volgorde. De laagste groepen waren Verzekeringwezen (0,15) en Handel (0,17). De groep Bankwezen had hier een waarde van 0,22. Voor

de bèta's van de gehele periode 1975-1981 geldt dat de hoogste groepen weer de Internationals (0,97) en Scheep- en Luchtvaart (0,71) waren. De laagste groepen zijn hier Bankwezen (0,52) en Verzekeringswezen (0,51).

Op grond van bovenstaande uitkomsten kunnen we concluderen dat het grootste risico te vinden is bij de groepen Internationals en Scheep- en Luchtvaart, terwijl de groepen Bankwezen en Verzekeringswezen de groepen zijn met het laagste risico. Vergelijken we de waarden van de groepen op dag- en weekbasis berekend over de gehele periode 1979-1981 dan blijkt met uitzondering van de groepen Verzekeringswezen en Industrie de waarde op dagbasis hoger te zijn dan op weekbasis. Dit wordt waarschijnlijk veroorzaakt door het feit dat de waarde van de bèta van Koninklijke Olie voor de gehele periode op dagbasis (1,37) lager is dan op weekbasis (1,41). Dit geldt ook bij het fonds Unilever. Deze twee fondsen hebben de grootste marktwaarde waardoor de andere bèta's gedrukt worden in waarde.

We willen nu nog aandacht schenken aan de vraag hoe groot het aantal bèta's is dat significant verschillend is van de bèta uit het voorafgaande jaar. Bij de fondsen uit tabel 4.3 blijkt dit 26 maal voor te komen. Dit is 25% van de gevallen. De significante bèta's komen in beide jaren ongeveer in gelijke mate voor. De verdeling over de groepen per jaar verschilt wel. Voor de bèta's berekend met behulp van weekgegevens bleek in 7 gevallen dat er sprake was van significantie (6,8%). In tabel 4.5 wordt hiervan een overzicht getoond.

Tabel 4.5 Het aantal malen dat er een significant verschil is tussen de bèta's op dag- en weekbasis voor opeenvolgende jaren.

		dag		week	
Groep	Totaal	1979/80	1980/81	1979/80	1980/81
Intern.	5	5	1	0	1
Sch./L.	3	1	1	0	0
Bankwezen	4	1	3	0	0
Verzek.	4	0	3	0	2
Industrie	24	4	3	1	2
Handel/D.	12	1	3	1	0
Tot groep	52	12	14	2	5

Uit tabel 4.5 blijkt dat - vooral bij de bèta's berekend op dagbasis - een behoorlijk aantal significant afwijkt van de bèta's van het jaar ervoor. Verder zien we dat de periode 1979/80 minder afwijkingen vertoont dan de periode 1980/81. Dit geldt zowel op dagbasis als op weekbasis.

4.3 Bèta's en de TAM-O

4.3.1 Inleiding

In de vorige paragraaf zijn waarden voor de bèta's gegeven die berekend zijn met de TAM als marktindex. In deze paragraaf willen we bèta's geven die gebaseerd zijn op berekeningen met de TAM-O als index.
In dit onderzoek zijn de dagelijkse slotkoersen van de in de TAM-O (en de TAM) voorkomende fondsen genomen. De beschouwde periode loopt van januari 1979 tot en met december 1984. De problematiek met betrekking tot de stabiliteit, de stationariteit en de voorspelbaarheid van de bèta's wordt in de daarop volgende paragraaf aangesneden.

4.3.2 De schattingen van de bèta's

In tabel 4.6 zijn de schattingen van de bèta's verstrekt voor de periode 1979-1984 en voor de afzonderlijke jaren uit deze periode. Deze schattingen zijn gebaseerd op daggegevens. Bovendien zijn voor de te onderscheiden groepen fondsen groepsgemiddelden vermeld. Een groepsgemiddelde is het rekenkundige gemiddelde van de schattingen van de bèta's van de in de desbetreffende groep voorkomende fondsen.

Tabel 4.6 De bèta's, gebaseerd op daggegevens van 48 fondsen, berekend voor de periode 1979-1984 en voor de afzonderlijke jaren. TAM-O als marktindex.

Fonds	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1979-1984
Intern.	1,08	1,04	1,22	0,97	1,19	1,16	1,12
Akzo	1,43	1,19	1,46	1,16	1.41	1,39	1,35
Hoogovens	1,49	1,34	1,31	1,08	1,85	1,85	1,56
Kon.Olie	0,91	0,96	0,94	0,67	0,74	0,86	0,83
Philips	0,91	1,04	1,43	1,02	1,31	0,98	1.11
Unilever	0,66	0,68	0,95	0,91	0,63	0,70	0,74
Sch./L.vaart	1,28	1,14	1,30	0,81	1,03	1,03	1,06
KLM	1,48	1,37	2,06	1,60	1,01	1,27	1,41
v.Ommeren	1,18	1,07	0,94	0,11	1,26	1,00	0,92
Nedlloyd	1,18	0,98	0,91	0,73	0,81	0,82	0,86
Bankwezen	0,58	0,81	0,58	1,13	1,01	1,08	0,91
ABN	0,50	0,87	0,52	0,86	0,79	0,96	0,79
AMRO	0,72	0,88	0,73	1,18	1,09	1,23	1,02
NMB	0,52	0,68	0,49	1,34	1,15	1,04	0,93
Verz.wezen	0,59	0,72	0,48	0,59	0,98	0,96	0,77
Nat.Ned.	0,46	0,63	0,60	0,02	1,12	0,73	0,64
Amev	0,71	0,89	0,48	0,90	1,05	0,93	0,85
Ennia/Aegon	0,61	0,64	0,37	0,86	0,77	1,22	0,81

Tabel 4.6 Vervolg

Fonds	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1979-1984
Industrie	1,02	1,00	1,01	0,93	0,95	0,98	0,98
ACF	0,93	1,10	1,26	0,87	0,95	1,03	1,03
Berkel	0,59	0,91	1,55	0,61	1,50	0,88	1,04
Bols	0,96	0,93	0,82	0,69	1,17	0,95	0,93
Boskalis	0,86	1,03	0,85	0,84	1,29	1,35	1,09
Bredero	0,68	0,93	0,50	0,75	0,55	0,80	0,71
Buhr.-Tet.	0,83	0,90	0,68	1,13	1,18	1,08	1,00
Desseaux	0,73	0,55	0,48	0,23	0,67	0,99	0,65
Fokker	0,92	0,61	1,15	1,04	0,89	1,06	0,95
Gamma	1,30	0,62	0,76	0,65	0,50	1,19	0,84
Gist-Broc.	1,63	1,35	1,22	1,13	0,94	0,89	1,11
Heineken	1,02	1,43	1,28	1,31	1,29	1,19	1,26
Oce-v.d.G.	0,71	1,13	1,33	1,03	0,93	0,89	1,01
Holec	1,61	1,50	1,35	1,47	1,98	1,66	1,62
HBG	0,88	0,79	0,54	0,92	0,90	0,99	0,86
Caland H.	1,40	0,85	1,38	0,88	0,84	0,55	0,88
KNP	1,46	0,93	1,04	1,48	0,74	1,00	1,08
Meneba	0,77	0,96	1,38	0,83	0,91	0,96	0,97
Naarden	1,88	1,04	1,32	1,03	1,09	1,12	1,18
Nutricia	0,96	1,64	0,96	0,99	0,68	0,79	0,96
Nijverdal	0,85	1,45	0,88	1,00	0,58	0,93	0,95
Tw.Kabel	0,04	0,21	0,45	0,45	0,42	0,31	0,34
VMF-Stork	1,43	1,01	1,28	1,19	0,93	1,24	1,16
Wessanen	1,09	1,02	0,78	0,76	0,83	0,75	0,84
Handel en Div.	1,06	1,08	1,05	1,30	1,02	0,95	1,06
Ahold	0,83	1,07	0,87	1,14	1,15	0,80	0,97
Ceteco	0,55	1,12	0,98	0,49	0,70	0,83	0,79
Deli	0,80	1,07	1,08	0,66	0,76	0,71	0,83
Hagemeyer	2,95	1,24	1,33	1,51	0,53	0,67	1,16
Intern.M.	1,33	1,41	1,57	1,34	0,71	1,38	1,27
Kluwer	0,70	0,67	0,43	0,85	0,76	0,97	0,77
KBB	0,79	1,07	1,27	2,18	1,04	0,89	1,20
Pakhoed	2,02	1,30	1,76	1,10	2,64	1,20	1,62

Tabel 4.6 Vervolg

Fonds	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1979-1984
Pont	0,30	0,55	0,89	1,59	1,35	0,69	0,94
VNU	0,85	0,97	0,66	1,06	0,96	1,11	0,97
Wyers	0,60	1,41	0,73	2,28	0,66	1,18	1,19
Tot.marktgem.	0,997	1,002	0,999	1,003	1,002	1,000	1,000

Het totale marktgemiddelde is hier het ongewogen gemiddelde van de 48 afzonderlijke bèta's. Dit gemiddelde behoeft niet gelijk aan één te zijn. Het gemiddelde is wel gelijk aan één, indien we het gewogen gemiddelde zouden nemen met als wegingscoëfficiënt de marktwaarde van de afzonderlijke fondsen en er een gewogen marktindex zoals de TAM gebruikt wordt. Voor de totale periode 1979-1984 neemt de bèta een minimum aan van 0,34 (Twentsche Kabel) en een maximum van 1,62 (Holec). Voor de afzonderlijke jaren variëren de schattingen van de bèta tussen ruimere grenzen. De kleinste schatting van de bèta is 0,02 voor Nationale Nederlanden in 1982 en de grootste schatting is 2,95 voor Hagemeyer in 1979. Er komen derhalve géén negatieve schattingen voor, terwijl zes schattingen groter zijn dan twee. Het betreffen de fondsen Pakhoed (1979), KLM (1981), KBB (1982), Wyers (1982), Pakhoed (1983) en het reeds genoemde fonds Hagemeyer (1979). Opgemerkt zij dat vijf van deze zes hoge uitkomsten behoren bij fondsen uit de groep Handel en Diversen.

+ Pakhoed

Bezien wij de groepsgemiddelden dan blijkt het gemiddelde van de groep Handel en Diversen op één uitzondering na (het jaar 1984) groter te zijn dan één. Ook de gemiddelden van de schattingen van de bèta's van de groep Internationals en de groep Scheep- en Luchtvaart zijn over het algemeen groter dan één. Een geheel ander beeld komt bij de groep Verzekeringswezen naar voren. Voor deze groep is het gemiddelde der jaarlijkse schattingen telkenjare kleiner dan één. Blijkbaar is aan een belegging in verzekeringsfondsen weinig systematisch risico verbonden. Anders geformuleerd: de verzekeringsfondsen zijn blijkbaar aandelen die defensief zijn. In dit verband noemen we een aandeel defensief indien de bèta kleiner is dan één. Is de bèta groter dan één, dan noemen we zo'n aandeel agressief. Soortgelijke waarnemingen doen zich bij de groep Bankwezen tot 1982 voor. Vanaf dat jaar zijn echter de schattingswaarden van de bèta's sterk toegenomen. Dit zou kunnen betekenen dat aan een belegging in bankaandelen na 1981 meer risico's kleven dan daarvoor. Een oorzaak hiervan is wellicht de internationale bankcrisis, die begon met een dreigende insolventie van Mexico in 1982. Eén groep is nog niet genoemd, te weten de groep Industrie. De groepsgemiddelden van deze groep wijken echter niet veel af van één.

Ter afsluiting van de bespreking van de in tabel 6.6 verstrekte gegevens willen wij nog even de aandacht vestigen op de schattingen van de bèta's voor de groep Internationals. De gemiddelden van deze schattingen zijn (op 1982 na) groter dan één. Dit lijkt enigszins in tegenspraak met de in de literatuur voorkomende constatering dat ondernemingen met een hoge beurswaarde veelal een bèta hebben die kleiner is dan één. In paragraaf 4.2 presenteerden wij bèta's voor nagenoeg dezelfde als de in dit onderzoek opgenomen fondsen, maar met gebruik van een gewogen index. Bij gebruikmaking van de gewogen index werden schattingen van bèta's gevonden die veelal kleiner waren dan één.

In tabel 4.7 worden voor de drie onderzoekingen omtrent de bèta's van aandelen de waarde per jaar en over de gehele periode weergegeven van de totale groep.

Tabel 4.7 De gemiddelde bèta voor verschillende onderzoekingen per jaar en voor de gehele periode. Zowel voor de TAM, de TAM-O als voor Koninklijke Olie.

	TAM				TAM-O
	week		dag		dag
	Alle	Kon. O	Alle	Kon.O	Alle
1975	0,72	1,34			
1976	0,77	1,11			
1977	0,79	1,08			
1978	0,99	1,09			
1979	0,81	1,24	0,72	1,17	1,00
1980	0,61	1,32	0,56	1,37	1,00
1981	0,32	1,59	0,47	1,45	1,00
Gehele per.	0,66	1,31	0,53	1,37	1,00

Tabel 4.7 geeft ons aanleiding tot een paar opmerkingen. We zien dat de ongewogen gemiddelden van alle bèta's per jaar-indien berekend met de TAM als marktindex - waarden hebben kleiner dan één. Eén van de oorzaken daarvan is dat de bèta van het fonds met de grootste beurswaarde (Koninklijke Olie) waarden heeft groter dan één. Zoals reeds eerder aangeduid, moet het gewogen gemiddelde van alle bèta's gelijk zijn aan één. Om het gemiddelde op die waarde te brengen, moeten veel bèta's relatief klein zijn om de bijdrage van Koninklijke Olie te compenseren, waardoor het ongewogen gemiddelde van alle bèta's kleiner zal zijn dan één. We zien dit ook aan de hand van de kolom met de bèta's van Koninklijke Olie. In het algemeen geldt dat, als de bèta van Koninklijke Olie erg hoog is, het gemiddelde van alle bèta's laag is. Zie bijvoorbeeld het jaar 1981 voor weekbèta's. Het ongewogen gemiddelde van de bèta's met de TAM-O als marktindex is, omdat de index ook ongewogen is, steeds gelijk aan één. Bij een gewogen index geldt, dat het gewogen gemiddelde gelijk is aan één.

4.3.3 Nadere analyse verdeling bèta's

Om een inzicht te geven hoe de schattingen van de bèta's in grootte verdeeld zijn, is in tabel 4.8 voor de totale periode als ook voor de afzonderlijke jaren een frequentieverdeling van deze schattingen opgenomen. Hiertoe zijn de fondsen naar opklimmende waarden van de schattingen van de bèta's gerangschikt. Zo wordt voor iedere periode t de laagste waarde van de bèta met β^1 en de hoogste waarde met β^{48} aangegeven. Aangezien als marktportefeuille een ongewogen index is gebruikt (de TAM-O), is uiteraard het ongewogen gemiddelde van de schattingen van de bèta's gelijk aan één.

Tabel 4.8 Een frequentieverdeling van de bèta's voor de totale periode en voor de afzonderlijke jaren.

Periode	β^1	β^{13}	β^{24}	β^{25}	β^{36}	β^{48}
1979-1984	0,34	0,84	0,96	0,97	1,11	1,62
1979	0,04	0,71	0,86	0,88	1,30	2,95
1980	0,21	0,87	0,98	1,01	1,13	1,64
1981	0,37	0,73	0,94	0,95	1,31	2,06
1982	0,02	0,76	0,99	1,00	1,16	2,28
1983	0,42	0,74	0,93	0,93	1,15	2,64
1984	0,31	0,83	0,96	0,97	1,12	1,85
gemiddelde*)	0,23	0,77	0,94	0,96	1,20	2,25

*) Dit is het gemiddelde van de afzonderlijke jaren

De mediaan, dit is het rekenkundige gemiddelde van β^{24} en β^{25} is voor alle jaren kleiner dan één en varieert van 0,87 voor 1979 tot 0,995 voor de jaren 1980 en 1982. Van alle 288 (6•48) schattingen van de jaarlijkse bèta's zijn een aantal ter grootte van 124 (43,1%) groter dan één, 3 (1,0%) gelijk aan één en 161 (55,9%) kleiner dan één. Blijkbaar hebben de fondsen met een defensief karakter (bèta <1) de overhand. Bezien wij het gemiddelde van β^{13} en β^{36} dan is dit voor de afzonderlijke jaren ongeveer één of iets lager. Daarentegen is het gemiddelde van de laagste jaarlijkse schatting, β^1, en de hoogste jaarlijkse schatting, β^{48}, op één uitzondering na (het jaar 1980) groter dan één. Dit wijst erop dat de afwijking in de symmetrie wordt veroorzaakt doordat fondsen met een hoge rangorde extreme hoge schattingen van de bèta hebben.

4.4 Stabiliteit en stationairiteit van bèta's

4.4.1 Inleiding

In de vorige paragraaf zijn voor achtenveertig fondsen op de Amsterdamse aandelenmarkt schattingen van bèta's gepresenteerd. Deze schattingen kunnen echter verschillen zowel naar gehanteerd berekeningsinterval als naar de beschouwde periode. Op deze verschillen willen wij in de paragraaf ingaan. Zoals reeds eerder is vermeld wordt een onderscheid gemaakt tussen stabiliteit en stationariteit. In paragraaf 4.4.2 wordt op de stabiliteit ingegaan. Wellicht belangrijker is de vraag of bèta's stationair zijn. Naarmate de bèta's van periode tot periode minder verschillen kan deze risicomaatstaf voor de komende periode immers beter worden voorspeld. In paragraaf 4.4.3 wordt aan de stationariteit aandacht besteed. De voorspellingen van de bèta's komen dan ook in de daarop volgende paragraaf aan de orde.

4.4.2 Stabiliteit

Door verschillende auteurs (onder andere Altman, Jacquillat & Levasseur [1974], Scholes & Williams [1977]) werd geconstateerd dat wanneer men bijvoorbeeld in plaats van daggegevens weekgegevens gebruikt, over het algemeen de schattingswaarden van de schattingen van de bèta's toenemen. De oorzaak van deze toeneming ligt mogelijkerwijs in het zogenaamde Fisher-effect. Dit effect is door Schwartz & Whitcomb [1977] als volgt beschreven. Stel dat er op dag t nieuws vrijkomt dat tot gevolg heeft dat de aandelenkoersen gaan stijgen. Neem daarbij aan dat van sommige aandelen (groep A) dit nieuws volledig in de koersen op dag t is geïncorporeerd, maar dat in de koersen van andere aandelen (groep B) dit nieuws pas op dag t+1 is verwerkt. De gevolgen zijn dan tweeërlei. Ten eerste zal het rendement op de marktindex positief zijn op dag t (omdat de koersen van groep A stijgen) en op dag t+1 (omdat de koersen van groep B toenemen). Hierdoor zullen de rendementen van de marktindex, op dagbasis gemeten, een positieve autocorrelatie met een tijdvertraging (time-lag) van één dag te zien geven.

Ten tweede zullen de storingstermen van groep A positief zijn op dag t, omdat de koersen van groep A op dag t het nieuws volledig hebben geïncorporeerd en de marktindex nog niet helemaal, en negatief zijn op dag t+1, daar de aanpassing van de markt op het nieuws dan volledig is verwerkt. Analoog geldt voor de storingstermen van de aandelen uit groep B dat deze negatief zijn op dag t en positief zijn op dag t+1. Fisher [1966] schreef dit effect toe aan het feit dat de laatste transactie in niet-frequent verhandelde aandelen plaats kan vinden ruim vóórdat de transactiedag voorbij is. De implicatie hiervan op de schatters van de bèta's is dat deze naar beneden toe onzuiver zijn.

Hawawini [1983] zoekt de verklaring voor de verschuiving in de bèta's bij een verandering van het berekeningsinterval in het feit dat sommige fondsen op de algemene markttrend vooruitlopen, terwijl andere fondsen met een zekere vertraging volgen. Deze auteur definieert daarvoor een q-ratio, die luidt:

$$q_{i,m} = (Q^{-1}{}_{i,m} + Q^{+1}{}_{i,m})/Q_{i,m} \tag{4.2}$$

waarin: $Q_{i,m}$ = de correlatiecoëfficiënt tussen het rendement van fonds i en het marktrendement;

$Q^{-1}{}_{i,m}$ = de correlatiecoëfficiënt tussen het rendement van fonds i en het marktrendement van de vorige dag;

$Q^{+1}{}_{i,m}$ = de correlatiecoëfficiënt tussen het rendement van fonds i en het marktrendement van de volgende dag.

Ook voor de marktportefeuille kan de q-ratio, $q_{m,m}$, worden bepaald. Hiervoor geldt,

$$q_{m,m} = 2\ Q^{-1}{}_{m,m} \qquad (4.3)$$

Voor β_i geschat over T dagen laat Hawawini zien dat geldt:

$$\beta_i(T) = B_i(1)\ [T+(T-1)q_{i,m}]/[T+(T-1)q_{m,m}]. \qquad (4.4)$$

Hier is $\beta_i(1)$ de geschatte waarde van β_i, waarbij een berekeningsinterval van één dag is gehanteerd. Wanneer $q_{i,m} > q_{m,m}$ neemt de schatting van $\beta_i(T)$ toe als T toeneemt. Voor die fondsen waarvoor geldt dat $q_{i,m} < q_{m,m}$ neemt de schatting af als het berekeningsinterval toeneemt. Alleen wanneer geldt dat $q_{i,m} = q_{m,m}$ is $\beta_i(T)$ gelijk aan $\beta_i(1)$.

Informatie omtrent de grootte van de q-ratio van fonds i geeft een inzicht in de richting waarin de waarde van de geschatte bèta verandert als de lengte van het berekeningsinterval toeneemt. Hawawini ([1983], blz. 76) toonde aan dat een indicatie omtrent de richting van de verschuiving in de waarde van de geschatte bèta bij een vergroting van het berekeningsinterval kan worden verkregen zonder dat een q-ratio moet worden uitgerekend. Volgens Hawawini bestaat er namelijk een negatieve correlatie tussen de q-ratio van fonds i, $q_{i,m}$, en de beurswaarde van fonds i. Dat wil zeggen dat hoe groter de beurswaarde, des te kleiner de q-ratio wordt. Alleen voor de fondsen met een zeer grote beurswaarde neemt de geschatte waarde van de bèta af bij een vergroting van het berekeningsinterval.

Van de door ons beschouwde fondsen zijn voor de periode 1979-1984 de bèta's geschat met behulp van daggegevens en met behulp van weekgegevens. Voorts is voor ieder fonds de q-ratio berekend. Als beurswaarde van ieder fonds is het rekenkundige gemiddelde genomen van de beurswaarden van het desbetreffende fonds op 1-1-1979 en op de ultimo van de afzonderlijke jaren. Uit hier niet opgenomen, maar bij de auteur beschikbare gegevens blijkt dat de q-ratio van de TAM-O negatief is. Dit betekent dat van de gehanteerde index de autocorrelatie voor een tijdvertraging van één dag kleiner is dan nul. Een negatieve q-ratio voor de index is in tegenspraak met het Fisher--effect. Ook voor een aantal fondsen vinden wij negatieve q-ratio's. Dit is niet in overeenstemming met de door Hawawini [1983] gevonden resultaten. Voorts kan - eveneens in tegenstelling tot Hawawini - voor de verschuivingen in de schattingen van de bèta's bij een toeneming van het berekeningsinterval géén relatie met de beurswaarden van de fondsen in kwestie worden aangetoond. Wel is er sprake van een positieve correlatie tussen de grootte van voornoemde verschuiving en de q-ratio.

4.4.3 Stationariteit

In het geval dat de bèta constant is kan het risico van het desbetreffende fonds in een systematisch en in een niet-systematisch deel worden gesplitst. Is de bèta niet constant, maar bijvoorbeeld een "random" coëfficiënt, dan geldt:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{M,t} + \pi_{i,t} \qquad (4.5)$$

met $\pi_{i,t} = (\beta_{i,t} - \beta_i) R_{M,t} + e_{i,t}$ (4.6)

en $E(\beta_{i,t}) = \beta_i$ (4.7)

De storingsterm $\pi_{i,t}$ is dan afhankelijk van het marktrendement $R_{M,t}$. Een gedeelte van de variantie van $\pi_{i,t}$ wordt dan verklaard door de variantie van het marktrendement. In het geval dat β een "random" coëfficiënt is, blijkt een gedeelte van het risico dat als niet-systematisch is aangeduid toch systematisch te zijn. Naarmate β meer stationair is, zal dit "in elkaar overlopen" van de verschillende risico's qua omvang minder zijn. De stationariteit van de bèta's is dus niet alleen belangrijk voor de mogelijkheid om bèta's te voorspellen, maar ook voor het onderscheid in systematisch en niet-systematisch risico.

Om de verandering in risicoklassen tussen de verschillende fondsen te onderzoeken zijn in navolging van Sharpe & Cooper [1972] en Altman, Jacquillat & Levasseur [1974] tien portefeuilles geconstrueerd. De samenstelling van deze portefeuilles is gebaseerd op de jaarschattingen van de bèta's. Aan het einde van jaar t wordt portefeuille 1 (= risicoklasse 1) ongewogen samengesteld uit de 10% fondsen met de laagste waarde voor de bèta's. In portefeuille 2 (= riscoklasse twee), zijn de volgende tien procent van de fondsen opgenomen, etc. De fondsen met de hoogste waarde van de bèta's zijn aan het einde van jaar t opgenomen in portefeuille 10. In tabel 4.9 is het aantal ondernemingen, dat in jaar t+1 en in jaar t+5 in dezelfde risicoklasse en in dezelfde of aangrenzende risicoklasse(n) als in jaar t voorkomt, uitgedrukt als percentage van het aantal ondernemingen in de desbetreffende risicoklasse aan het eind van jaar t.

Tabel 4.9 Het percentage van de ondernemingen in dezelfde risicoklasse en in dezelfde of in de aangrenzende risicoklasse(n) in jaar t+1 en jaar t+5.

Risicoklasse	In dezelfde risicoklasse		In dezelfde of in aangrenzende risicoklasse	
in jaar t	jaar t+1	jaar t+5	jaar t+1	jaar t+5
1	31,3	0,0	43,8	18,2
2	3,3	18,2	40,0	72,7
3	3,5	37,5	31,0	37,5
4	12,9	9,1	41,9	36,4
5	23,5	9,1	50,0	18,2
6	16,7	16,7	44,4	41,7
7	11,1	11,1	25,9	33,3
8	12,1	0,0	54,6	20,0
9	6,9	9,1	41,4	27,3
10	35,5	30,0	45,2	60,0
Rekenk. gemid.	15,7	14,1	41,8	36,5

Uit tabel 4.9 blijkt het rekenkundige gemiddelde van de percentages van de ondernemingen die in jaar t en in de jaren t+1 en t+5 in dezelfde risicoklasse zitten respectievelijk 15,7% en 14,1% te bedragen. Wanneer men ook de aangrenzende risicoklassen in de beschouwing betrekt, dan stijgen deze percentages tot respectievelijk 41,8 en 36,5. Bezien we deze percentages per risicoklasse, dan blijkt voor jaar t+1 het aantal ondernemingen dat in dezelfde risicoklasse zit als het jaar t te variëren van 3,3% (voor risicoklasse 2) tot 35,5% (voor risicoklasse 10). Voor ondernemingen in dezelfde of in de aanliggende risicoklasse is het laagste percentage 25,9 (risicoklasse 7) en het hoogste percentage 54,6 (risicoklasse 8).

Voor de vergelijking tussen jaar t en jaar t+5 beschikken we hier maar over twee groepen van waarnemingen, te weten 1975-1980 en 1976-1981. Uit de gegevens van tabel 4.9 mogen daarom slechts zeer voorzichtig conclusies getrokken worden met betrekking tot de risicoklasse voor jaar t en jaar t+5. Het percentage van de ondernemingen dat in jaar t en jaar t+5 in dezelfde risicoklasse zit, varieert van 0,0 (risicoklasse 1 en 8) tot 37,5 (risicoklasse 3). Neemt men ook de aangrenzende risicoklassen mee in de beschouwing, dan fluctueert dit percentage tussen 18,2 (risicoklasse 1 en 5) en 72,7 (risicoklasse 2).

Altman, Jacquillat en Levasseur [1974] berekenden voor de verschillende risicoklassen het percentage van de fondsen in dezelfde en in de dezelfde of in de aangrenzende risicoklasse(n) in jaar t en in jaar t+1 en t+5. De rekenkundige gemiddelden van de percentages die deze auteurs vonden waren respectievelijk 18,5; 19,0; 46,6 en 45,1. (vergelijk tabel 4.9: respectievelijk 15,7; 14,1; 41,8 en 36,5). Deze percentages zijn met name voor jaar t+5 iets hoger dan in ons onderzoek. Altman, Jaquillat en Levasseur vonden dat voor de extreme risicoklassen (1, 2 en 9, 10) de ondernemingen vaker in dezelfde en in dezelfde of aanliggende risicoklassen in de opeenvolgende jaren bleven. Hun conclusie ten aanzien van de minder grote mutaties bij extreme risicoklassen wordt ook in tabel 4.9 ten dele bevestigd. Uit deze tabel blijkt dat voor jaar t+1 de berekende percentages voor risicoklasse 1 en 10 hoger zijn dan het gemiddelde van alle risicoklassen (31,3 en 35,5 ten opzichte van 15,7). Voor de risicoklassen 2 en 9 geldt echter dat de percentages kleiner zijn dan het gemiddelde van alle risicoklassen (3,3 en 6,9 ten opzichte van 15,7).
Beschouwen we dezelfde of een aangrenzende risicoklassen, dan krijgen we eenzelfde beeld. De risicoklassen 1 en 10 tonen een hoger percentage dan het gemiddelde (43,8 en 45,2 ten opzichte van 41,8) en de risicoklassen 2 en 9 een lager percentage (40,0 en 41,4 ten opzichte van 41,8).

Voor t+5 ontstaat een ander beeld. De risicoklassen 1 en 9 hebben een percentage dat lager is dan het gemiddelde van alle klassen en de risicoklassen 2 en 10 een hoger percentage. Indien we het gemiddelde van respectievelijk de twee laagste en de twee hoogste klassen nemen, dan geldt voor alle mogelijke situaties dat dit gemiddelde hoger is dan het vergelijkbare gemiddelde van alle risicoklassen.

Baesel [1974] onderzocht voor 160 op de NYSE genoteerde fondsen de stationariteit van de bèta's. Deze auteur gebruikte voor de periode 1950-1967 maandrendementen en berekende voor ieder fonds de bèta's, gebaseerd op de gegevens betreffende één kalenderjaar. Per fonds werden zodoende 18 bèta's verkregen. Vervolgens werden voor ieder jaar de bèta's in vijf risicoklassen ingedeeld. De fondsen met de laagste bèta's over het desbetreffende jaar kwamen in risicoklasse 1 terecht, terwijl de fondsen met de hoogste bèta's voor dat jaar in risicoklasse 5 werden ingedeeld. Door dit voor ieder jaar in de beschouwde periode te doen kon de overgangsmatrix worden berekend. Deze overgangsmatrix is samengesteld uit de overgangsmatrices voor de afzonderlijke jaren. Ieder element uit de overgangsmatrix over de gehele periode is het ongewogen gemiddelde van de waarden van het desbetreffende element uit de overgangsmatrices voor de afzonderlijke jaren.

Uit de gegevens van de aldus verkregen overgangsmatrix over de gehele periode bleek dat de fondsen die in periode t in risicoklasse 1 of 5 waren ingedeeld vaker in periode t+1 in dezelfde risicoklasse terecht kwamen dan fondsen die in periode t in risicoklasse 2, 3 of 4 waren ingedeeld. Baesel concludeerde hieruit dat extreme bèta's meer stationair zijn dan minder extreme bèta's. Alexander & Chervany [1980] merken terecht op dat Baesel deze conclusie niet had mogen trekken. De fondsen in de extreme risicoklassen hebben immers een grotere kans om daarin te blijven dan fondsen in de tussenliggende klassen. Verandering van risicoklasse kan bij fondsen uit risicoklasse 1 en 5 maar naar één kant plaatsvinden,

terwijl fondsen uit risicoklasse 2, 3 en 4 in de volgende periode zowel in een lagere als in een hogere risicoklasse terecht kunnen komen. Houdt men met dit laatste rekening dan zijn volgens Alexander & Chervany de bèta's van de fondsen in de extreme risicoklassen minder stationair dan in de overige risicoklassen.
De analyse die Beasel heeft gevolgd, hebben we toegepast op bèta's, die berekend zijn met de TAM-O als marktindex. Het betreft hier daggegevens. In tabel 4.10 is de overgangsmatrix van de vijf risicoklassen voor de gehele periode 1979-1984 weergegeven.

Tabel 4.10 De overgangsmatrix voor de 5 risicoklassen voor jaar t en jaar t+1 over de periode 1979-1984 voor de Amsterdamse aandelenmarkt.

risicoklasse	risicoklasse jaar t+1				
jaar t	1	2	3	4	5
1	46,0	24,0	10,0	12,0	8,0
2	23,9	32,6	15,2	15,2	13,0
3	18,4	16,3	30,6	18,4	16,3
4	4,3	13,0	28,3	30,4	23,9
5	8,2	12,2	18,4	20,4	40,8

Uit deze tabel blijkt dat van de fondsen die in jaar t in risicoklasse 1 zijn ingedeeld 46,0% ook in jaar t+1 in deze risicoklasse terecht te komen. Evenals Baesel vinden wij dat de percentages op de hoofddiagonaal van de overgangsmatrix voor de risicoklassen 1 en 5 groter zijn dan voor de andere risicoklassen. Voorts blijkt dat 36,1% (=[46,0 +32,6 +30,6 + 30,4 +40,8]/5) van de overgangscombinaties op de hoofddiagonaal terecht komen. Dit percentage was bij Baesel [1974] 26,8% en bij Alexander & Chervany [1980] 20,8%. Blijkbaar zijn de verschuivingen tussen de verschillende risicoklassen onderling voor de Amsterdamse aandelenmarkt minder groot dan voor de NYSE.

Om te onderzoeken of de bèta's van fondsen in de extreme risicoklassen meer of minder stationair zijn dan de bèta's van de fondsen in de andere risicoklassen is voor de jaren 1979 tot en met 1983 per risicoklasse de gemiddelde absolute afwijking van de bèta's van het desbetreffende jaar met die van het daaropvolgende jaar berekend. Deze gegevens zijn opgenomen in tabel 4.11

Tabel 4.11 De gemiddelde absolute afwijking van de bèta's tussen jaar t en jaar t+1 per risicoklasse.

	risicoklasse jaar t+1				
jaar t	1	2	3	4	5
1979	0,287	0,218	0,195	0,312	0,511
1980	0,233	0,320	0,242	0,156	0,370
1981	0,398	0,388	0,352	0,262	0,463
1982	0,462	0,134	0,182	0,362	0,676
1983	0,269	0,224	0,149	0,179	0,381
(rekenkundig) gemiddelde	0,330	0,258	0,224	0,254	0,471

Uit deze tabel blijkt dat voor de risicoklasse 1 en 5 de gemiddelde absolute afwijking van de bèta tussen jaar t en jaar t+1 groter is dan voor de andere risicoklassen. Om te bezien of de waargenomen verschillen tussen de risicoklassen dusdanig zijn dat daarmee de hypothese dat de jaarlijkse gemiddelde absolute afwijkingen van de bèta's identiek verdeeld zijn over de risicoklassen moet worden verworpen, is de Kruskal-Wallis toets toegepast. De waarde van de toetsingsgrootheid H uit deze toets is 11,8. Dit is significant bij vier vrijheidsgraden en bij een onbetrouwbaarheid van 2%. Dit impliceert dat de hypothese, dat de jaarlijkse gemiddelde absolute afwijkingen van de bèta's identiek verdeeld zijn over de te onderscheiden risicoklassen, moet worden verworpen. Dit resultaat is in overeenstemming met hetgeen Alexander & Chervany [1980] voor de NYSE vinden. Ook indien in plaats van de absolute afwijkingen de (absolute) gemiddelde afwijkingen van de schattingen van de bèta's worden genomen, dient de vermelde nulhypothese te worden verworpen.[6]

4.5 Voorspellen

4.5.1 Inleiding

In deze paragraaf worden de voorspellingen van de bèta's, die gebaseerd zijn op de historische methode, vergeleken met die welke worden verkregen bij toepassing van de methode van Blume [1971]. Beoordelingsmaatstaf daarbij is de gemiddelde kwadratische fout (MSE).

Indien bèta's stationair zijn is de bèta over periode t een goede schatter voor de bèta over periode t+1. Uit paragraaf 4.3 blijkt echter dat de bèta de gewenste eigenschap van stationariteit niet volledig bezit. Blume merkt op dat bèta's naar één tenderen. Gebruikt men bij het voorspellen historische bèta's dan houdt men geen rekening met deze tendens. Om genoemde tendens in zijn voorspelling te incorporeren schatte Blume de relatie:

$$\beta_t = a + b\ \beta_{t-1} + e_t \qquad (4.8)$$

waarin: β_t = de bèta over periode t;
β_{t-1} = de bèta over periode t-1;
e_t = de storingsterm over periode t;
a en b parameters.

6. Bij de (absolute) relatieve afwijking wordt het verschil tussen de bèta's van jaar t en jaar t+1 gerelateerd aan de bèta van jaar t.

Onder aanname dat deze relatie ook voor de volgende periode geldt is het mogelijk de bèta's voor periode t+1 (β^1_{t+1}) te voorspellen.

$$\beta^1_{t+1} = a + b\ \beta_t \tag{4.9}$$

Blume meent dat de bèta's uit vergelijking 4.9 kleinere voorspelfouten hebben dan de historische (ongecorrigeerde) bèta's.

De methode die de kleinste voorspelfout heeft wordt als de beste aangemerkt. Als maatstaf voor de voorspelfout dient de gemiddelde kwadratische fout (mean square error):

$$MSE = (1/N)\ \Sigma_i (\beta_{i,t+1} - \beta^1_{i,t+1})^2 \tag{4.10}$$

met $i = 1,2,\ldots,N$

waarin: N = het aantal beschouwde fondsen

$\beta_{i,t+1}$ = de werkelijke waarde van de bèta van fonds i voor periode t+1

$\beta^1_{i,t+1}$ = de voorspelde waarde van de bèta van fonds i voor periode t+1

Klemkosky & Martin [1975] laten zien dat de gemiddelde kwadratische fout in drie componenten is op te delen, te weten onzuiverheid, inefficiëntie en een stochastische storingsterm. De onzuiverheid is een maatstaf voor de afwijking van het gemiddelde van de werkelijke bèta's van het gemiddelde van de te voorspellen bèta's. Deze onzuiverheid zal over het algemeen klein zijn wanneer de gegevens betreffende de NYSE worden gebruikt. Voor deze fondsen geldt dat het gemiddelde van de bèta's voor zowel periode t als periode t+1 bij benadering gelijk aan één is. De onzuiverheid zal eveneens zeer klein zijn wanneer een ongewogen index wordt gebruikt. De tweede component duidt de mate van inefficiëntie aan. Hierdoor wordt aangegeven of er een tendens bestaat dat de werkelijke bèta's groter (kleiner) zijn dan de voorspelde bèta's bij lage (hoge) waarden van de voorspelde bèta's. De laatste component bevat de stochastische storingstermen van de MSE. Deze storingstermen zijn onafhankelijk van de werkelijke en van de voorspelde bèta's. Het doel van de splitsing van de gemiddelde kwadratische fout in de te onderscheiden componenten is dat bepaald kan worden of de gehanteerde schattingsmethode een substantiële onzuiverheid en/of een substantiële inefficiëntie in zich draagt. Indien dat zo is, wordt daarmee aangegeven waar een eventuele verbetering van de gehanteerde schattingsmethode kan worden gezocht.

4.5.2 De methode van Blume

Voor de afzonderlijke jaren 1979 tot en met 1984 is voor de door ons beschouwde fondsen de methode van Blume toegepast. De schattingen van a en b uit de vergelijking (4.10) voor de Nederlandse bèta's alsmede de daarbij behorende t-waarden zijn in de tabel 4.12 opgenomen. Deze tabel bevat de waarden van de coëfficiënten behorende bij de regressie van de bèta's van jaar t op de bèta's van jaar t-1, waarbij de TAM-O als marktindex heeft gefungeerd.

Tabel 4.12 De waarde van de regressiecoëfficiënten van de bèta's van jaar t op die van jaar t-1, waarbij de TAM-O als marktindex fungeert.

Jaar t	a	b	t(a)	t(b)
1980	0,70	0,30	8,39	4,00
1981	0,23	0,77	2,38	4,81
1982	0,63	0,37	3,78	2,33
1983	0,88	0,12	6,01	0,88
1984	0,65	0,35	7,17	4,09

Bezien wij de waarden van de parameters uit tabel 4.12 dan varieert de waarde van b van 0,12 voor 1983 tot 0,77 voor 1981. De waarde van b is bij een onbetrouwbaarheid van 5% voor 1983 niet significant van nul verschillend. Het afwijkende gedrag voor 1983 kan wellicht worden veroorzaakt door de koersomslag in augustus 1982 gevolgd door het krachtige koersherstel in 1983. De t-waarden van de constante term zijn voor alle jaren groter dan twee. Dit impliceert dat bij het voorspellen van de bèta's met de constante term rekening dient te worden gehouden.

Bij het vergelijken van de voorspelfouten die ontstaan bij het gebruik van de historische bèta's met de voorspelfouten bij toepassing van de methode van Blume wordt een splitsing gemaakt naar de drie reeds eerder genoemde componenten. In tabel 4.13 is een vergelijking van de gemiddelde kwadratische fout, MSE, voor de beide voorspelmethoden opgenomen. Tevens zijn in deze tabel de gegevens per component van de MSE vermeld.

Tabel 4.13 Een vergelijking van de gemiddelde kwadratische fout voor de voorspelling gebaseerd op de historische bèta (I) en voorspellingen gebaseerd op de methode van Blume (II), waarbij de TAM-O als marktindex heeft gefungeerd.

Jaar	MSE		onzuiverheid		inefficiëntie		stochastische storingsterm	
	I	II	I	II	I	II	I	II
1981	0,165	0,188	0,000	0,000	0,019	0,004	0,146	0,184
1982	0,229	0,194	0,000	0,000	0,025	0,006	0,204	0,188
1983	0,305	0,170	0,000	0,000	0,147	0,012	0,158	0,158
1984	0,121	0,061	0,000	0,000	0,068	0,007	0,053	0,052

Uit tabel 4.13 blijkt dat op één uitzondering na de Blume-methode een kleinere voorspelfout oplevert dan de historische methode. Deze uitzondering betreft het jaar 1981. Voor dat jaar voorspelt de historische methode de bèta beter dan de Blume-methode. Het verschil in voorspellingsfout is evenwel klein. Voor de andere jaren is dit verschil groter en bovendien ten gunste van de Blume-methode.

Analyse per component leert dat bij beide methoden de onzuiverheid nul is, hetgeen ook niet zo vreemd is bij een ongewogen index. Ten aanzien van de inefficiëntie geldt dat deze component voor de Blume-methode nauwelijks enige waarde heeft, terwijl dit bij de historische methode wel het geval is. De stochastische storingstermen van de beschouwde methoden ontlopen elkaar niet veel. De "winst" bij de Blume-methode in vergelijking tot de historische methode wordt verkregen uit de kleinere variantie in de voorspelde bèta's. Deze onderzoeksresultaten zijn in overeenstemming met die welke Klemkosky & Martin [1975] en Elgers & Murray [1982] voor de Verenigde Staten vonden.

4.6 Samenvatting en conclusies

In dit hoofdstuk is aandacht besteed aan de bèta's van aandelen. Naast de getalwaarde van deze grootheid is ingegaan op aspecten als stabiliteit, stationariteit en voorspelbaarheid van de bèta. Ten aanzien van de stabiliteit luidt onze conclusie dat gegeven de beschouwde fondsen en de onderzochte periode de bèta's deze eigenschap niet hebben. Dit impliceert dat de schattingen van de bèta's afhankelijk zijn van het gekozen berekeningsinterval. Deze instabiliteit wordt niet veroorzaakt door het Fisher-effect, noch kan zij verklaard worden uit de door Hawawini gesignaleerde differentie in de snelheid waarmee aandelenkoersen van de te onderscheiden fondsen op nieuws reageren.

Ook ten aanzien van de stationariteit komen wij op grond van de verkregen resultaten tot de uitspraak dat de bèta's van de beschouwde fondsen deze eigenschap over de periode 1979-1984 niet volledig bezitten. De waarde van de schattingen van de bèta's varieert van periode tot periode. Het wordt derhalve moeilijk om de bèta als maatstaf voor het systematische risico te blijven zien.

Als laatste onderdeel is de voorspelbaarheid bezien. Daarbij is eerst de Blume methode geïntroduceerd. De met deze methode verkregen schattingen van de bèta's blijken een kleinere voorspelfout te hebben dan wanneer de historische bèta's worden gehanteerd. Nadere analyse van de voorspelfout bij de Blume-methode leert dat deze voornamelijk uit een stochastische storingsterm bestaat. Derhalve worden geen aanwijzingen verkregen over eventuele betere schattingen van de bèta's.

HOOFDSTUK 5 OPTIE-THEORIE

5.1 Inleiding

In deze studie beperken we ons tot opties op aandelen. Een optie is dan een overeenkomst waarbij de ene partij (de koper) het recht heeft om gedurende een bepaalde periode tegen een vooraf vastgestelde prijs een bepaald aantal aandelen te kopen of te verkopen. De andere partij (de verkoper, ook wel de schrijver genoemd) heeft de plicht om bij uitoefening van het recht door de koper de aandelen te leveren of af te nemen. Indien uitoefening alleen plaats kan vinden aan het eind van de looptijd, spreken we van een Europese optie. Is uitoefening mogelijk gedurende de gehele periode, dan spreken we van een Amerikaanse optie. Op de European Option Exchange (EOE) worden ondermeer Amerikaanse opties op Europese aandelen verhandeld. De opties op de EOE-index zijn daarentegen van het Europese type.
Het recht om te kopen heet een call, het recht om te verkopen een put. De positie van koper en verkoper geldt op het moment van het aangaan van de overeenkomst. Dit noemt men een "opening" van een positie. Indien men tijdens de looptijd of zeer kort voor het einde de overeenkomst weer afbouwt, dan spreken we van het "sluiten" van de positie. We willen hier nog een drietal begrippen definiëren die in het verdere ver-loop nog vaak terug zullen komen. We noemen bij callopties een optie "out-of-the-money" indien de uitoefenprijs hoger is dan de prijs van het aandeel, "at-the-money" indien beide prijzen gelijk zijn en "in-the-money" als de aandelenprijs boven de uitoefenprijs ligt.
In deze studie zullen we geen verdere aandacht schenken aan de institutionele aspecten van de handel in opties.

De theorievorming omtrent de waardebepaling van opties is in de laatste jaren, vooral na de artikelen van Black & Scholes [1973] en Cox, Ross en Rubenstein [1979], in een stroomversnelling gekomen. Bovengenoemde schrijvers hebben voor het eerst een algemene evenwichtsoplossing gepresenteerd voor de waarde van een Europese calloptie. Reeds in 1900 heeft Bachelier [1900] een oplossing voor de waardebepaling van opties gegeven, maar de uitgangspunten van Bachelier waren zodanig, dat dit leidde tot een aantal onaanvaardbare gevolgtrekkingen. Een van de uitgangspunten bij hem was namelijk de aanname, dat bewegingen van aandelen beschreven kunnen worden met behulp van een rekenkundige Brownse beweging. Dit houdt onder andere in dat de kans op een koersstijging van x gulden even groot is als de kans op een daling van x gulden en dat dit onafhankelijk is van het niveau van de aandelenprijs. Dit uitgangspunt heeft als irreële consequentie dat de aandelenkoers negatief kan worden.

Zoals reeds eerder is aangegeven kan de optie-theorie op een aantal voor ons onderzoek relevante aspecten een nader licht werpen. Dit geldt onder meer ten aanzien van de stationairiteit van de bèta van een aandeel (zie hoofdstuk 4.4), maar in het kader van deze studie komt het accent te liggen op de mogelijkheid om de rendementsverdeling van een aandeel in de toekomst beter te bepalen.
In dit hoofdstuk wordt eerst in paragraaf 2 de waarde van een optie bepaald in een wereld waarin aandelenkoersen te beschrijven zijn via een discrete verdeling: de binomiale verdeling. Daarna wordt in parararagraaf 3 verder gegaan met het bekende model van Black en Scholes. Dit is te beschouwen als een limietgeval van het binomiale model. Aandacht zal worden geschonken aan de veronderstellingen die ten grondslag liggen aan het continue model.

Eén van de belangrijkste factoren bij de prijsbepaling is de variantie van de toekomstige aandelenrendementen. Meestal wordt in de praktijk deze waarde bepaald aan de hand van een reeks historische koersen (de historische variantie). Men neemt dan aan dat de beweeglijkheid niet zal wijzigen in de volgende periode. Anders geformuleerd: men gaat uit van een

stationair proces van aandelenkoersbewegingen. Het is echter maar de vraag of er sprake is van stationairiteit. Het is ook mogelijk dat er gedurende kortere of langere tijd sprake is van stationairiteit, waarna er soms een wijziging optreedt, gevolgd door weer een stationaire toestand. Indien men zich baseert op de variantie uit het verleden, dan ontstaan hierdoor bij het meten van het niveau van de variantie verschillen tussen de gemeten waarde van de variantie en de "werkelijke" waarde. Indien men bijvoorbeeld uitgaat van de koersen van de afgelopen 100 dagen, dan zal een grote wijziging in de koers, gevolgd door weer een rustig beeld, toch 100 dagen de waarde van de variantie mede bepalen. Een voorbeeld vormt de "krach" van oktober 1987. Na 16 oktober was de waarde van de werkelijke variantie sterk gestegen: de onzekerheid was fors toegenomen. Toch is de waarde van de historische variantie niet meteen sterk gestegen. Pas na 100 dagen is de wijziging volledig verwerkt, maar dan kan best blijken dat de werkelijke onzekerheid alweer een stuk gedaald is. Men loopt als het ware steeds achter de feiten aan. Alleen bij een stationair proces, waarbij er geen veranderingen optreden in de grootte van de variantie, vormt de historische variantie een goede maatstaf voor de werkelijke variantie.
Een andere methode is gebruik te maken van de gegevens op het moment van de prijsbepaling en uit deze gegevens dan een schatting te maken van de werkelijke variantie. Dit kan geschieden met behulp van de zogenaamde "impliciete" variantie. Dit is die variantie die de modelprijs van een optie gelijk doet zijn aan de marktprijs. In paragraaf 4 wordt hierop verder ingegaan.

5.2 Optieprijzen bij binomiaal verdeelde koersen

5.2.1 Inleiding

Zoals reeds eerder is vermeld zijn er in de loop van de tijd een reeks modellen ontwikkeld om optieprijzen te bepalen. Een van de belangrijkste variabelen in al deze modellen is het gedrag van de aandelenkoers. In het bekende model van Black & Scholes bijvoorbeeld wordt aangenomen dat de aandelenkoers een continu verloop heeft.

In deze paragraaf wordt verondersteld dat de koersveranderingen op ieder toekomstig tijdstip niet te beschrijven zijn als continue maar als discrete veranderingen. Tevens wordt verondersteld dat zij te beschrijven zijn met behulp van de binomiale verdeling. Aan te tonen is dat de zogenaamde "continue random-walk" te beschouwen is als een limietgeval van de binomiale verdeling. De veronderstelling van de binomiale verdeling houdt in, zoals reeds vermeld, dat aandelenkoersen op discrete tijdstippen worden beschouwd. De koers kan dan of gestegen of gedaald zijn, ieder met een bepaalde kans. Bij de afleiding wordt uitgegaan van een Europese calloptie.
Allereerst zal de optieprijs worden bepaald voor het één-periode model, vervolgens voor meerdere perioden en tenslotte voor de situatie van oneindig veel perioden.

5.2.2 Het één-periode model.

In dit model veronderstellen we dat er sprake is van slechts één periode. Er bestaat een moment aan het begin van de periode (t=0) en een moment aan het einde van de periode (t=1). Alvorens het model af te leiden in symbolen, zal aan de hand een getallenvoorbeeld de situatie worden beschreven. Het is dan eenvoudiger om het model af te leiden in symbolen.
Veronderstel dat we een aandeel hebben dat op tijdstip t=0 een prijs heeft van f 200. Aan het eind van de eerste (en enige) periode zal de prijs of gestegen zijn met 20% tot 240 gulden (dit geschiedt met kans 0,75), of de prijs zal gedaald zijn met 20% tot f 160 (dit met kans 0,25). Aangenomen wordt dat de rentevoet voor deze periode 10% bedraagt. Laten we nu eens een tweetal verschillende beleggingsporte-feuilles vergelijken. De eerste beleggingsportefeuille houdt in het kopen van 0.625 stuks aandelen en het lenen van een bedrag

ter grootte van f 90,91. De tweede portefeuille omvat een calloptie op het aandeel uit de eerste portefeuille met een uitoefenprijs van f 190. De optie is van het Europese type en kan dus alleen aan het einde van de periode uitgeoefend worden. De totale investering bij portefeuille 1 bedraagt 34,09 gulden (0,625•200 minus 90,91). Het geleende bedrag moet aan het einde van de eerste periode worden terugbetaald inclusief rente. Dit is dan in totaal f 100. De waarde van de eerste portefeuille aan het einde van de periode hangt af van de koersmutatie van het aandeel. De waarde zal, afhankelijk van een stijging of daling, zijn:

stijging 0,625 • 200 • 1.2 - 100 = f 50 met kans 0,75

daling 0,625 • 200 • 0,8 - 100 = f 0 met kans 0,25

Ook de waarde van de tweede portefeuille hangt af van de aandelenkoers op het einde van de periode. In het algemeen geldt, dat de waarde van een call-optie gelijk is aan het maximum van nul of het verschil tussen de aandelenkoers en de uitoefenprijs. In ons voorbeeld zal de aandelenkoers gelijk zijn aan f 240 of f 160, zodat de waarde van de call met uitoefenprijs f 190 gelijk is aan:

stijging 1.2 • 200 - 190 = f 50 met kans 0.75

daling 0.8 • 200 - 190 = f 0 met kans 0,25

Het blijkt dat de uitkomsten van alle mogelijke toestanden (in dit voorbeeld slechts twee) voor beide portefeuilles hetzelfde zijn. Dan zal op grond van het arbitragebeginsel ook moeten gelden dat de waarde van beide portefeuilles aan het begin van de periode gelijk zijn, zodat geldt dat de call-optie aan het begin van de periode een prijs moet hebben van f 34,09, zijnde de investering in portefeuille 1.

We willen nu dit getallenvoorbeeld in symbolen neerschrijven. We hebben een aandeel S, dat met een kans q zal stijgen met 100 a%. De koers zal bij een stijging aan het einde van de periode (1+a)• S bedragen. De kans op een daling is 1-q. De koers zal dan (1-b)• S bedragen. Indien men op het tijdstip t=1 B gulden rente en aflossing moet betalen, kan men nu bij een rentevoet van r% een bedrag van B/(1+r) lenen.
De waarde van de call (C) op t = 1 met uitoefenprijs E hangt natuurlijk weer af van de beweging van de aandelenkoers. Deze waarde zal zijn:

$$\text{stijging} \quad Cs = \max\,[0,\ (1+a)\bullet S - E\ ] \text{ met kans } q \qquad (5.1)$$

$$\text{daling} \quad Cd = \max\,[0,\ (1-b)\bullet S - E\ ] \text{ met kans } 1-q \qquad (5.2)$$

waarin Cs = waarde calloptie indien de aandelenkoers stijgt
Cd = waarde calloptie indien de aandelenkoers daalt.

We kiezen nu het aantal aandelen (h) van de eerste portefeuille en het te lenen bedrag (B) zodanig dat geldt:

$$Cs = h\bullet(1+a)\bullet S - B \qquad \text{en } Cd = h\bullet(1-b)\bullet S - B \qquad (5.3)$$

Dan moet gelden:

$$h = \frac{Cs - Cd}{(a+b)\bullet S} \qquad \text{en} \qquad B = \frac{(1-b)\bullet Cs - (1+a)\bullet Cd}{a + b} \qquad (5.4)$$

Indien we de getallen van ons voorbeeld invullen krijgen we:

$$h = \frac{50 - 0}{(0,2 + 0,2)\bullet 200} = 0,625 \qquad B = \frac{(1-0,2)\bullet 50 - (1+0,2)\bullet 0}{0,2 + 0,2} = 100$$

De waarde van de call wordt nu:

$$C = h \bullet S - B/(1+r) \qquad (5.5)$$

Indien we (5.4) in (5.5) invullen, krijgen we :

$$C = \frac{p \cdot Cs + (1-p) \cdot Cd}{1+r} \qquad (5.6)$$

$$\text{waarin } p = \frac{b+r}{a+b} \quad \text{en} \quad 1 - p = \frac{a-r}{a+b} \qquad (5.7)$$

Voor ons getallenvoorbeeld geldt:

$$p = \frac{0,2+0,1}{0,2+0,2} = 0.75 \qquad \text{en } 1-p = 0,25.$$

$$\text{De waarde van de call is nu: } \frac{0,75 \cdot 50 + 0,25 \cdot 0}{1+ 0,1} = 34,09$$

Het komt er dus op neer dat de waarde van de call gelijk is aan het gedisconteerde bedrag van de verwachte waarde van de call aan het einde van de looptijd. Als disconteringsvoet geldt de risicovrije interestvoet. Bij de bepaling van de verwachte waarde worden de mogelijke uitkomsten gewogen met de parameter p. Deze parameter gedraagt zich als een kansparameter. Het is echter niet de kans op een stijging of daling van de koers. Getalsmatig is deze parameter hier wel gelijk aan die kans.

5.2.3 Het meer-perioden model

In de vorige paragraaf werd uitgegaan van een éénperiode model. In deze paragraaf wordt deze veronderstelling losgelaten. Eerst wordt de waarde van een call bepaald voor twee perioden en vervolgens voor meer perioden.
In de situatie van twee perioden veronderstellen we dat de kans op een stijging per periode steeds gelijk is. Ons aandeel S (f 200) zal met kans q (0,75) 100a% (20%) stijgen of met kans 1-q (0.25) 100b% (20%) dalen. Het verloop van de aandelenprijs op de tijdstippen t=1 en t=2 is dan alsvolgt weer te geven:

t=0	t=1	t=2
		$(1+a)^2 \cdot S = 288$
	$(1+a) \cdot S = 240$	
$S = 200$		$(1+a)(1-b) \cdot S = 192$
	$(1-b) \cdot S = 160$	
		$(1-b)^2 \cdot S = 128$

Voor de optiewaarde geldt dan (Cs = optieprijs bij stijgende koersbeweging en Cd = optieprijs bij dalende koersbeweging):

		$Css = \max\,[0,\ (1+a)^2 \cdot S - E\,] = 98$
	Cs	
C		$Csd = \max\,[0,\ (1+a)(1-b) \cdot S - E\,] = 2$
	Cd	
		$Cdd = \max\,[0,\ (1-b)^2 \cdot S - E\,] = 0$

Volgens de afleiding van par. 5.2.2 kunnen we de waarde van Cs en Cd bepalen (zie relatie 5.6) :

$$Cs = \frac{p \cdot Css + (1-p) \cdot Csd}{1+r} \quad \text{en} \tag{5.8}$$

$$Cd = \frac{p \cdot Csd + (1-p) \cdot Cdd}{1+r} \tag{5.9}$$

Tevens geldt $C = \dfrac{p \cdot Cs + (1-p) \cdot Cd}{1+r}$ (5.10)

De vergelijkingen 5.8, 5.9 en 5.10 tezamen leveren dan de waarde op van de call-optie:

$$C = \frac{p^2 \cdot Css + 2p(1-p) \cdot Csd + (1-p)^2 \cdot Cdd}{(1+r)^2} \tag{5.11}$$

In het gebruikte getallenvoorbeeld geldt dat de waarde van een Europese optie met een uitoefenprijs 190 en een looptijd van twee perioden gelijk is aan:

$$\frac{0{,}75^2 \bullet 98 + 2 \bullet 0{,}75 \bullet 0{,}25 + 0{,}25^2 \bullet 0}{(1+0{,}1)^2} = 46{,}18 \qquad (5.12)$$

Nu het mogelijk is de waarde van de call-optie te bepalen voor één en twee perioden, is het ook mogelijk om de waarde van de call te bepalen voor n perioden. Via volledige inductie is af te leiden dat geldt:

$$C = \frac{\sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \max[0, (1+a)^i (1-b)^{n-i} S - E]}{(1+r)^n} \qquad (5.13)$$

In relatie 5.13 wordt gesommeerd van i=0 tot i=n. Het is echter pas zinvol te sommeren vanaf die waarden, waarvoor geldt dat de aandelenprijs aan het einde van de looptijd hoger is dan de uitoefenprijs, want anders is de waarde van de optie toch gelijk aan nul. Er moet dus gelden:

$$(1+a)^i \; (1-b)^{n-1} \; S > E \qquad (5.14)$$

Stel dat dit het geval is bij i= g. Dan geldt dus:

$$(1+a)^g \; (1-b)^{n-g} \; S > E \qquad (5.15)$$

$$\text{oftewel } g > \frac{\log \frac{E}{S(1-b)^n}}{\log \frac{1+a}{1-b}} \qquad (5.16)$$

Relatie 5.16 levert dan de waarde op vanaf waar de sommatie moet beginnen. De waarde van de call is nu als volgt te schrijven:

$$C = \frac{\sum_{i=g}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \{ (1+a)^i (1-b)^{n-i} S - E \}}{(1+r)^n} \qquad (5.17)$$

Relatie 5.17 is te splitsen in twee delen. Indien we voor de cumulatieve binomiale verdeling, lopende van g tot n, met kansparameter p, de uitdrukking Q[g,n,p] schrijven, dan geldt:

$$C = S \bullet Q[g,n,p^1] - \frac{1}{(1+r)^n} \bullet E \bullet Q[g,n,p] \qquad (5.18)$$

waarin $p^1 = \frac{1+a}{1+r} \bullet p$ en $p = \frac{b+r}{a+b}$

Een aantal opmerkingen is hier op zijn plaats.

1. De oorspronkelijke kansparameter q (= de kans op stijging) zit niet in de formule voor de waardering van de optieprijs.
2. Er is bij de afleiding van de waarderingsformule niets verondersteld omtrent de risicohouding van de beslisser. De enige veronderstelling is dat de beslisser meer rijkdom prefereert boven minder rijkdom.
3. De enige stochastische variabele, waarvan de call-optie afhankelijk is, is de aandelenprijs. Dus de call-prijs hangt niet direct af van de prijs van andere aandelen of portefeuilles.
4. Te bewijzen is, dat p^1 uit relatie 5.18 waarden aanneemt tussen nul en één, zodat deze de eigenschappen van een kansparameter heeft.
5. In een risico-neutrale wereld geldt dat p gelijk is aan q. De waarde van een call is dan te beschouwen als de contant gemaakte, verwachte waarde van de aandelenprijs minus de contante waarde van de uitoefenprijs, beide gedisconteerd tegen de risicovrije interestvoet.

6. Indien de beslisser risico-mijder of -zoeker is, vertaalt zich dat in de waarden van a, b en r en via deze weer in de waarden van p en p^1.

Laten we relatie 5.18 eens toepassen op de situatie dat er drie subperioden zijn. We moeten dan eerst de ondergrens vaststellen (zie relatie 5.16). Dit wil zeggen:

$$(1+0,2)^g \bullet (1-0,2)^{3-g} \bullet 200 > 190.$$

Hieruit volgt, dat g groter dan 1 moet zijn.

De waarde van p en p^1 is dan resp. 0,75 en 0,818 zodat geldt:

$$C = 200 \bullet Q[2;3;0,818] - (1+0,1)^{-3} \bullet 190 \bullet Q[2;3;0,75]$$

Dit levert op:

$$C = 200 \bullet 0,912 - 0,751 \bullet 190 \bullet 0,844 = 61,97.$$

Bij het één-periode model kregen we als waarde van de call 34,09. We zien dat een verlenging van de looptijd tot een verhoging van de waarde van de call leidt. Anders geformuleerd: bij twee perioden kan de prijs van de aandelen meer boven de uitoefenprijs uitkomen. Dit verhoogt de waarde van de call. De aandelenprijs kan ook verder onder de uitoefenprijs komen, maar dit heeft geen invloed op de waarde van de call. Een optie is immers een recht en geen plicht. Voor alle aandelenprijzen onder de uitoefenprijs is de waarde van de call gelijk aan nul.

5.2.4 Oneindig veel perioden

We willen nu nagaan wat er gebeurt als het aantal perioden wordt uitgebreid tot oneindig veel. Het is niet de bedoeling dat de totale looptijd naar oneindig gaat, maar dat de gegeven periode wordt ingedeeld in zeer veel subperioden. De periode van bijvoorbeeld 9 maanden kan worden verdeeld in 9 perioden van 1 maand, 39 perioden van een week, 270 perioden van 1 dag. Zo kunnen we doorgaan tot oneindig veel subperioden. We moeten vervolgens vaststellen welke stijgingen en dalingen er optreden binnen een subperiode. De kansen op stijgingen of dalingen blijven wel hetzelfde, onafhankelijk van de lengte van het subinterval. Iets dergelijks geldt ook voor de rente per subperiode. Indien we de gehele periode T noemen en deze gehele periode verdelen in n subperioden, dan moet gelden dat de rente over de gehele periode (1+r) gelijk is aan:

$(1+r_s)^{T/n}$, waarin r_s = de rente in de subperiode.

Om het gehele proces te laten convergeren, is het nodig om voor 1+a en 1-b de volgende uitdrukkingen te kiezen:

$$1 + a = \exp(\sigma\sqrt{(T/n)}) \quad \text{en} \tag{5.19}$$

$$1-b = \exp(-\sigma\sqrt{(T/n)} \tag{5.20}$$

waarin: exp(.)= de e-macht,
σ = de standaardafwijking van de aandelenmutaties in de subperiode.

Door de keuze in de relaties 5.19 en 5.20 krijgen we dat, wanneer n naar oneindig gaat, de waarde van de call te neer te schrijven is als:[7]

$$C = S \bullet N\ (d_1) - E \bullet e^{-rT} \bullet N(d_2) \tag{5.21}$$

waarin: S = aandelenkoers
E = uitoefenprijs
r = ogenblikkelijke rentevoet per subperiode

---

7. Zie voor een uitgebreide afleiding Cox,J.C.,Ross,S.A., en Rubinstein,M., [1979].

σ = ogenblikkelijke standaarddeviatie aandelenrendementen per subperiode

T = aantal subperioden tot einde looptijd

N (.) = cumulatief standaardnormale verdeling

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{E} + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{5.22}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{5.23}$$

Relaties 5.21 geeft de waarde weer van een calloptie volgens het model van Black en Scholes. We zien dat dit model te beschouwen is als een limietgeval van het meer algemene, binomiale geval. Zo is ook aan te tonen, dat een zogenaamd 'jump-proces' te schrijven is als een limiet situatie van dit algemene model.

Uitbreidingen van het binomiale model zijn ondermeer aan te brengen voor put-opties. We krijgen dan een soortgelijke afleiding. Het is ook mogelijk na te gaan wat er gebeurt indien er cash-dividenden betaald gaan worden of andere uitkeringen gedaan worden zoals claims, stock-dividenden enz.

Een groot voordeel van het binomiale model is dat het ons inzicht geeft in het onderliggende proces van aandelenkoersbewegingen. Daarnaast geeft het inzicht in de factoren die de waarde van een optie bepalen. Het is nu eenvoudiger om meer ingewikkelder modellen te begrijpen.

5.2.5 Risico-afkeer

In de vorige paragraaf is bij de afleiding en de voorbeelden met zodanige getallen gewerkt dat er impliciet van risiconeutraal gedrag sprake moest zijn. Dit blijkt onder meer uit de keuze van de waarden van a en b en de kans op stijging. De verwachte koers aan het einde van de eerste periode bedraagt 220 gulden, hetgeen precies 10% hoger is dan de koers aan het begin van de periode. Dit is ook het gehanteerde rentepercentage. Er is geen vergoeding voor het risico, want stilzwijgend is het gehanteerde rentepercentage gelijk aan de risicovrije interestvoet. Het gevolg hiervan is onder andere dat de waarden van de parameters p en q gelijk zijn. We willen nu aandacht schenken aan de situatie van risico-afkeer. Dit houdt in dat er bij onzekerheid een risicopremie aanwezig moet zijn. De verwachte koers moet hoger zijn dan (1+r) maal de koers aan het begin van de periode. Dit zal het geval zijn indien we bijvoorbeeld voor a de waarde 0,3 nemen in plaats van 0,2 De verwachte waarde van de koers aan het einde van de periode bedraagt dan:

$$0{,}75 \bullet (1+0{,}3) \bullet 200 + 0{,}25 \bullet (1-0.2) \bullet 200 = 235$$

We kunnen op dezelfde manier doorgaan als bij de risiconeutrale benadering. Ook hier kunnen we een tweetal portefeuilles samenstellen. Indien we voor het aantal aandelen 0,7 hanteren en een bedrag lenen ter grootte van 101,82 dan zullen de uitkomsten voor beide portefeuilles op het einde van de looptijd voor iedere mogelijk toestand steeds paarsgewijs gelijk zijn. Dan moeten de beginbedragen ook gelijk zijn. Dit houdt in dat de optie een waarde heeft van:

$$0{,}7 \bullet 200 - 101{,}82 = 38{,}18$$

In de situatie van risico-neutraliteit gold een waarde voor de optie van 34,09. We zien dat in deze nieuwe situatie er sprake is van een hogere waarde van de optie. Een van de factoren, die de stijging van de optiewaarde heeft veroorzaakt, is de stijging in de variantie van de aandelenprijzen aan het einde van de periode. Te berekenen valt dat in de eerste situatie deze variantie gelijk is aan 1200, in de nieuwe situatie is de variantie gestegen tot 1225. Daarnaast blijkt dat de waarde van p gelijk is aan 0,6. Dit is nu ongelijk aan de kans van stijging. Deze laatste is namelijk gelijk aan 0,75. Ook de waarde van p^1verandert. Deze wordt nu

0,709. Zoals reeds vermeld geldt alleen bij risico-neutraliteit dat de waarde van p gelijk is aan q (de kans dat de aandelenkoers stijgt).
Nog steeds geldt dat de optie een waarde heeft gelijk aan de gedisconteerde waarde aan het einde van de looptijd. De disconteringsvoet blijft de inleenvoet (= risicovrije rentevoet). Het risico-mijdende gedrag komt per saldo tot uiting in de factoren p en p^1. Een tweede verandering treedt op bij de benedengrens vanaf waar de sommatie uitgevoerd moet worden. Die benedengrens wordt volgens relatie 5.16 berekend. De enige factor die gewijzigd is, is a. Deze is gestegen, zodat per saldo g daalt. Dit wil zeggen dat er op een eerder moment al begonnen wordt met de sommatie. Dat is ook logisch, want de stijgingen zijn per keer groter geworden, zodat we minder stijgingen nodig hebben om boven de uitoefenprijs uit te komen.

5.3 Het model van Black & Scholes

5.3.1 Inleiding

Na in paragraaf 5.2 aandacht te hebben geschonken aan de analyse volgens de binomiale verdeling wordt in deze paragraaf nader ingegaan op het model van Black & Scholes (B&S). Zoals reeds is aangetoond is dit model te beschouwen als een limietgeval van het binomiale model uit paragraaf 5.2. In die paragraaf werd verondersteld dat de verdeling van de aandelenkoersen te beschrijven is met behulp van een binomiale verdeling: een discrete verdeling. Het model van B&S is gebaseerd op de aanname van een continue verdeling.

Eerst zullen we de veronderstellingen, die ten grondslag liggen aan het model, langslopen. Vervolgens willen we een voorbeeld geven van de bepaling van de modelwaarde. In paragraaf 5.3.3 wordt het model uitgebreid met de veronderstelling dat er wel dividend op de aandelen wordt uitbetaald, dit in tegenstelling met de veronderstelling bij B&S. Daarnaast worden enkele andere uitbreidingen besproken.

5.3.2 Het model

Black en Scholes zijn bij de afleiding van hun model uitgegaan van de volgende veronderstellingen (zie Smith [1976]):

- de risicovrije interestvoet is bekend en constant;
- de aandelenprijzen volgen een continue "random walk", zodanig dat de mogelijke aandelenprijzen aan het einde van ieder eindig interval lognormaal verdeeld zijn; de variantie van de rendementen van een aandeel is constant;
- er wordt in de beschouwde periode geen dividend uitbetaald op de aandelen;
- de optie is van het Europese type, dus uitoefening is alleen mogelijk aan het einde van de looptijd;
- het is mogelijk elk bedrag te lenen of uit te lenen tegen de risicovrije interestvoet;
- "short gaan" in aandelen en/of opties is toegestaan en brengt geen extra kosten met zich mee.

Via de creatie van een hedge tussen aandelen en opties is het mogelijk een zodanige portefeuille uit beide beleggingsvormen samen te stellen, dat deze risicovrij is (zie bijvoorbeeld relatie 5.4). De opbrengst van deze portefeuille zal dan gelijk moeten zijn aan de risicovrije interestvoet, daar er anders arbitrage mogelijkheden ontstaan. Gebruikmakend van het lemma van Ito[8] kwamen Black & Scholes tot de reeds eerder (zie paragraaf 5.2.4) vermelde evenwichtsvergelijking:

$$C = S \cdot N(d_1) - E \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2) \qquad (5.24)$$

---

8. zie Mc Kean, H.P. [1969].

Met behulp van deze formule is het mogelijk, gegeven de input-variabelen, de waarde van een optie te bepalen. De input-variabelen zijn respectievelijk de aandelenkoers op dit moment, de risico-vrije interestvoet, de resterende looptijd, de uitoefenprijs en tot slot de variantie van de aandelenrendementen.

Voorbeeld

We bepalen de waarde van een Europese calloptie van een aandeel waarop in de beschouwde periode geen dividend uitbetaald wordt. De huidige aandelenkoers bedraagt f 50. De uitoefenprijs is 55 gulden. De resterende looptijd bedraagt een half jaar. De rentevoet stellen we op 6% Uit waarnemingen vanuit het verleden blijkt dat 8% een goede schatting is voor de variantie van de aandelenopbrengsten per jaar. Uit deze gegevens is het nu mogelijk om de modelprijs van de optie te bepalen. Deze bedraagt f 2,62.
Van de input gegevens is alleen de variantie niet zonder meer te bepalen. De overige gegevens wel. In paragraaf 5.4 zal verder op dit probleem worden ingegaan.

5.3.3 Uitbreidingen van het model

In de loop van de tijd zijn er een hele reeks uitbreidingen op het model van B&S ontstaan. In deze paragraaf wordt aandacht geschonken aan één van de uitbreidingen namelijk de veronderstelling van Merton [1973] dat er wel dividend wordt uitgekeerd. Er wordt wel een speciale dividendpolitiek verondersteld. Merton neemt aan dat er steeds, dus continu, een dividend betaald wordt en wel zodanig dat het dividendrendement (D/S) per subperiode een constante is. Deze constante noemen we d.

$$d = D/S$$

waarin : d = dividendrendement/100;

D = dividend bedrag per subperiode;
S = aandelenprijs.

Het gevolg van deze veronderstelling is, dat er in de loop van de tijd steeds iets van de aandelenkoers afgaat. De aandelenkoers zal enerzijds naar verwachting continu stijgen om de aandeelhouder een rendement te kunnen verschaffen, maar anderzijds zal de aandeelhouder een deel van zijn rendement verkrijgen uit de continue stroom dividenden, die de aandelenkoers verlaagt. De evenwichtsoplossing van dit model luidt dan:

$$C = e^{-dT}\, S\, N(d_{1*}) - e^{-rT}\, E\, N(d_{2*}) \qquad (5.25)$$

waarin C = modelprijs optie op dividend betalend aandeel;
d = dividendrendement/100 per subperiode;
T = resterende looptijd;
S = aandelenprijs;
r = rentevoet per subperiode;
σ = standaarddeviatie aandelenkoers per subperiode;
E = uitoefenprijs;
N(.) = cumulatieve standaardnormale verdelingsfunctie;

$$d_{1*} = \frac{\ln S/E + (r-d+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_{2*} = d_{1*} - \sigma\sqrt{T}$$

Dit laatste model is ondermeer van belang voor de prijsvorming van langlopende opties op dividend betalende aandelen. Het model van B&S zonder dividend is niet in staat om deze opties goed te waarderen. Indien de looptijd wat langer is kan men bij benadering wel stellen dat de stroom dividenden continu is. Men vervangt dan de stroom discrete dividenden door een continue stroom. Wel blijft het de vraag of het dividendrendement uitgedrukt in de aandelenkoers altijd con-

stant blijft in de loop van de tijd. Een andere veronderstelling waarvan bij het waarderen van de langlopende optie vanuit wordt gegaan, is dat het onderliggende proces van de aandelenkoersbeweging hetzelfde blijft. Dit wil zeggen dat de variantie per deelperiode constant blijft.
Het Merton model geeft de waardering van een optie van het Europese type. Het is niet zonder meer toepasbaar voor opties van het Amerikaanse type. Indien, zoals bij het Amerikaanse type, voortijdige uitoefening van de optie is toegestaan, kan het in bepaalde situaties zinvol zijn om daadwerkelijk tot voortijdige uitoefening over te gaan. Wellicht wordt een betere waarderingsformule verkregen met behulp van de binomiale verdeling. Een andere methode om rekening te houden met dividenden is om de contante waarde van het dividend af te trekken van de huidige aandelenprijs. Deze laatste methode werkt goed bij opties van het Europese type. Bij Amerikaanse opties blijft het probleem van de voortijdige uitoefening bestaan.

5.4 De impliciete variantie uit optieprijzen

5.4.1 Inleiding

In deze paragraaf zullen we onze aandacht richten op de impliciete variantie. Eerst zal deze worden gedefinieerd. Aan de hand van een voorbeeld wordt het begrip duidelijker gemaakt. Het zal blijken dat er in de concrete situatie voor opties op een aandeel meerdere waarden te bepalen zijn voor de impliciete variantie van het rendement van het onderliggende aandeel. Daarom zal worden nagegaan hoe men aan de hand van die meerdere uitkomsten kan komen tot een goede schatting van de werkelijke variantie, door bijvoorbeeld de berekening van een gemiddelde waarde van de diverse waarden van de impliciete varianties.

Onze interesse gaat uit naar de bepaling van de impliciete variantie vanwege het feit dat:

- het langs deze weg mogelijk is iets te zeggen omtrent de verwachtingen die leven bij de participanten op de aandelenmarkt;
- de impliciete variantie gebruikt kan worden ter beoordeling van optiewaarderingsmodellen;
- de impliciete variantie gebruikt kan worden bij het onderzoek naar de efficiency van de optiebeurs;
- met behulp van de impliciete variantie de verdeling van de verwachte rendementen van een aandeel kan worden bepaald en daarmede de verdeling van de toekomstige aandelenprijzen.

Onze aandacht richt zich vooral op dit laatste aspect.

5.4.2 De definitie

Zoals reeds eerder is aangegeven kan, indien de benodigde inputvariabelen gegeven zijn, de waarde van een calloptie berekend worden. Deze variabelen zijn: de huidige aandelenprijs, de uitoefenprijs van de optie, de rentevoet, de resterende looptijd en de variantie van de aandelenrendementen.
Het model kan echter ook op een andere manier worden gebruikt. Indien de input-variabelen, met uitzondering van de variantie, bekend zijn en de prijs van de optie gegeven is, is het mogelijk om de variantie te bepalen die impliciet in de prijs van de optie zit. De op deze wijze bepaalde variantie noemt men de impliciete variantie. De impliciete variantie is die variantie die de modelwaarde van de optie gelijk doet zijn aan de marktprijs.

Stel dat de marktprijs van de optie uit het voorbeeld in paragraaf 5.3 gelijk is aan f 2,80. Dit wil dan zeggen dat er een verschil bestaat tussen de modelprijs (f 2,62) en de marktprijs. Indien men veronderstelt dat de inputvariabelen, met uitzondering van de variantie juist zijn, moet er dus een andere waarde gelden voor de variantie. De variantie was gebaseerd op waarnemingen uit het verleden, maar die waarde behoeft natuurlijk niet te gelden in de komende periode. Indien men als waarde voor de variantie 8,75% genomen zou hebben, dan is de modelprijs gelijk aan f 2,80. Deze is dan weer gelijk aan de marktprijs. De variantie waarbij model- en marktprijs van de optie precies gelijk zijn is de impliciete variantie. Deze variantie is dus niet gebaseerd op het koersgedrag van het aandeel in het verleden, maar is gebaseerd op het verwachte koersgedrag van het aandeel in de toekomst. Op deze wijze is het mogelijk te bepalen hoe de markt de toekomstige aandelenwijzigingen taxeert.

5.4.3 Meerdere impliciete varianties

In het algemeen geldt dat er op één tijdstip meerdere opties van eenzelfde aandeel genoteerd zijn. Dit betreft dan opties met verschillende uitoefenprijzen en opties met verschillende looptijden. Het is dan mogelijk om op eenzelfde tijdstip voor al die verschillende opties de impliciete variantie te bepalen. Het zou nu ideaal zijn indien de uitkomsten van deze berekeningen dezelfde zouden zijn. Dan heeft men na één berekening reeds de waarde van de impliciete variantie. Het blijkt echter dat er voor iedere optie meestal een andere waarde voor de impliciete variantie uitkomt. Dan rijst wel de vraag: wat is nu de waarde van de impliciete variantie? Moet men de hoogste nemen of de laagste of een gemiddelde waarde?
Meestal wordt gekozen voor een gemiddelde waarde. Bij het middelen kunnen dan de toevallige schommelingen eruit gemiddeld worden. De vraag blijft hoe men moet middelen. Moet men bijvoorbeeld een ongewogen of een gewogen gemiddelde bepalen en indien men kiest voor het laatste, welke moeten dan de gewichten zijn? Eén van de mogelijke oplossingen voor dit probleem is om een gewogen gemiddelde van de impliciete variantie te berekenen met als wegingsfactor de afgeleide van de optieprijs naar de variantie ($\delta c/\delta\sigma^2$). Dit wordt gedaan om die opties die een grote gevoeligheid hebben voor wijzigingen in de waarde van de variantie ook het grootste gewicht te geven. De waarde van deze afgeleide is vast te stellen met behulp van de volgende formule:

Laten we dit eens aan de hand van een voorbeeld verder uitwerken. Van de EOE-index stonden op een bepaalde dag ondermeer de volgende opties genoteerd op de EOE:

Afloop maand	Uitoefenprijs						
juli	200	205	210	215	220	225	230	
augustus	200	205	210	215	220	225	230	235
september			210	215	220	225	230	235
oktober	200		210		220		230	

De resterende looptijd bedraagt voor de juli serie 14 dagen, voor de augustus serie 49 dagen,voor de september serie 77 dagen, terwijl de resterende looptijd voor de oktober serie 112 dagen bedraagt. De koers van de index bedroeg die dag 230,92. De prijzen op de EOE op de bewuste dag worden in tabel 5.1 weergegeven:

Tabel 5.1 De prijzen van de EOE indexopties.

	Afloopmaanden			
Uitoef.prijs	juli	aug	sept	okt
200	31.2	32.5		32.5
205	27.5	27.5		
210	21.5	22.5	22.0	22.5
215	16.0	16.2	18.5	
220	11.5	13.4	14.5	17.0
225	7.0	10.5	11.5	
230	3.3	7.5	8.5	10.5

Het is nu mogelijk om uit deze marktprijzen de impliciete variantie te bepalen met behulp van het model van B&S. In onderstaande tabel worden de waarden van de impliciete varianties weer gegeven.

Tabel 5.2 De impliciete variantie.

	juli	augustus	september	oktober
200	*	*		
205	0,250	*		
210	0,062	*	*	
215	*	*	*	
220	0,019	0,018	0,014	0,021
225	0,022	0,031	0,022	
230	0,019	0,032	0,023	0,023

* de impliciete variantie is niet te bepalen

Uit tabel 5.2 blijkt dat de impliciete variantie een reeks van waarden kan aannemen, terwijl het toch steeds opties betreft op dezelfde onderliggende waarde. Zoals reeds eerder is aangegeven kunnen we een gemiddelde berekenen uit de berekende impliciete variantie. Dit gemiddelde kan zowel ongewogen als gewogen worden vastgesteld. We kunnen het gemiddelde van de waarden van de impliciete variantie bepalen per afloopdatum, per uitoefenprijs en tenslotte voor alle opties. Hetzelfde is mogelijk voor een gewogen gemiddelde van de waarden van de impliciete variantie. De weging kan geschieden met behulp van formule 5.26, die weergeeft de afgeleide van de optieprijs naar de variantie. Voor het onderhavige voorbeeld blijkt dat de waarde van de variantie, als gewogen gemiddelde van alle waarden van de impliciete variantie gewogen met de afgeleide, gelijk is aan 0,0229.
Gezien de vele uitkomsten en het benodigde rekenwerk ligt het voor de hand om na te gaan of het steeds nodig is alle waarden van de impliciete variantie in de weging mee te nemen. We kunnen nagaan welke opties het zwaarste wegen. Dit doen we door de afgeleide van de optieprijs nader te onderzoeken.

5.4.4 Het gedrag van de wegingsfactor

In de literatuur wordt een voorkeur uitgesproken om de impliciete variantie te wegen met de afgeleide van de optieprijs naar de variantie. Zoals we reeds gezien hebben zijn er voor eenzelfde aandeel op eenzelfde moment meerdere verschillende uitkomsten voor de impliciete variantie. We kunnen nu al die uitkomsten wegen, maar in deze paragraaf willen we nadere aandacht schenken aan die afgeleide. Wellicht behoeven we niet alle mogelijke uitkomsten mee te wegen, maar kunnen we volstaan met een kleiner gedeelte. Hiertoe willen we nagaan voor welke opties de waarde van de afgeleide het belangrijkste is. In formule 5.26 is de afgeleide van de optieprijs naar de variantie weergegeven. We kunnen voor de opties op de EOE uit ons voorbeeld de waarden bepalen van de afgeleide. Deze worden weergegeven in tabel 5.3.

Tabel 5.3 De waarden van de afgeleide van de call naar de variantie.

uitoef.prijs	jul	aug	sept	okt
200	0,01	5,4		33,9
205	0,09	12,8		
210	0,87	25,5	47,7	71,4
215	4,9	43,7	68,6	
220	17,0	64,9	90,1	114,7
225	36,8	84,3	108,6	
230	51,5	96,5	120,7	145,1
235	48,0	98,3	124,5	150,8
240	30,5	89,6	119,7	149,2

Aan de hand van deze tabel kunnen we een aantal conclusies trekken. Er geldt des te korter de resterende looptijd is des te lager de waarde van de afgeleide is. Daarnaast geldt des te meer de optie out-of-the-money is des te lager de

waarde van de afgeleide is. Ook indien de optie verder in-the-money komt daalt de waarde. Samenvattend kunnen we concluderen dat de waarde van de afgeleide het hoogst is voor at-the-money opties of opties die net in-the-money zijn. Tevens geldt dat de waarde het hoogst is voor de opties met de langste looptijd. Indien men het gewogen gemiddelde van alle waarden van de impliciete variantie wil benaderen, dan volstaat het de impliciete variantie te nemen van de langstlopende opties, die "at"- of net "in-the money" zijn.
In ons voorbeeld moet men de oktober opties nemen met uitoefenprijs 230. Een schatter voor de variantie is dan 0,023. Zouden we het gewogen gemiddelde bepalen van alle waarden van de impliciete variantie, dan krijgen we als uitkomst 0,0229. We zien in dit voorbeeld, dat de afwijking zeer gering is.

HOOFDSTUK 6 DE BENADERING VIA $N(d_2)$

6.1 Inleiding

In hoofdstuk 5, paragraaf 2.4 is in vergelijking 5.21 de evenwichtsvergelijking van het model van Black en Scholes ter bepaling van de prijs van een Europese call optie gegeven. Deze vergelijking luidt:

$$C = S \bullet N(d_1) - e^{-rT} \bullet E \bullet N(d_2) \qquad (6.1)$$

In hoofdstuk 5, paragraaf 2 werd de binomiale benadering voor de waardebepaling van opties beschreven. Daar bleek dat de factor $N(d_2)$ in een risico-neutrale wereld op te vatten is als een kansgrootheid namelijk de kans dat op het einde van de looptijd van de optie de aandelenprijs hoger is dan de uitoefenprijs.

In het verdere verloop van dit hoofdstuk zullen we risico-neutraliteit veronderstellen. In hoofdstuk 7 zal worden ingegaan op de situatie die ontstaat indien wordt uitgegaan van risico-mijdend gedrag. In de situatie van risico-neutraliteit kan via het gebruik maken van de factor $N(d_2)$ de kansverdeling van de aandelenprijs op ieder willekeurig tijdstip in de toekomst samengesteld worden. Indien we bijvoorbeeld de verwachte verdeling van de aandelenprijs over 6 maanden willen bepalen, dan moeten we de waarde van de factor $N(d_2)$ berekenen voor een waarde van $T=0,5$. Voor de uitoefenprijs nemen we dan alle mogelijke waarden, in principe tussen nul en plus oneindig. We krijgen dan de kansverdeling van de aandelenprijs.
Een probleem hierbij is echter de waarde van de variantie. Deze waarde wordt meestal bepaald met behulp van koersen uit het verleden. De kansverdeling die dan verkregen wordt is niet gebaseerd op de verwachting van de markt. Dit is wel het geval indien verondersteld mag worden dat de variantie die

ex-post gold ook ex-ante zal gelden, of anders geformuleerd: de veronderstelling is dat de variantie constant blijft.
Uit de analyse van paragraaf 5.4 bleek dat het echter mogelijk is de variantie te meten die "leeft" in de markt. Dit geschiedt door de vaststelling van de impliciete variantie uit de optieprijzen. Indien de waarden van $N(d_2)$ met behulp van deze variantie worden berekend ontstaat de kansverdeling van de aandelenprijs op een bepaald moment, gebaseerd op de verwachting van de markt. In paragraaf 6.2 zullen we een voorbeeld daarvan laten zien. In de volgende paragraaf wordt nader aandacht geschonken aan de factor $N(d_2)$. Nagegaan zal worden wat de invloed is van wijzigingen van de parameters op de waarde van deze factor.

6.2 De verdeling

Zoals reeds eerder is vermeld, geeft de factor $N(d_2)$ de kans weer dat de aandelenkoers aan het einde van de looptijd boven een bepaalde waarde (de uitoefenprijs) zal liggen. Als we p_1 de kans bij uitoefenprijs E_1 noemen en p_2 de kans bij uitoefenprijs E_2, dan geeft (uitgaande van $E_1 < E_2$) het verschil $(p_1 - p_2)$ de kans weer dat de aandelenkoers ligt tussen E_1 en E_2. Op deze wijze is het mogelijk om de gehele kansdichtheidsverdeling te benaderen.

Aan de hand van een voorbeeld zullen we laten zien hoe het, gegeven de inputvariabelen, mogelijk is om de verdeling van de aandelenprijs op het einde van de looptijd van de optie te bepalen. We nemen hiervoor een optie met een resterende looptijd van 6 maanden. De huidige aandelenkoers is 50 gulden en de rentevoet is 6%. Als waarde voor de onzekerheid (de variantie van de logaritmen uit de aandelenopbrengsten) nemen we 15%.
In tabel 6.1 wordt een deel van de kansverdeling van de aandelenkoers aan het einde van de looptijd weergegeven. Daartoe is voor een reeks van uitoefenprijzen de waarde van de factor

$N(d_2)$ genomen en vervolgens het verschil tussen de uitkomsten van deze grootheid bij twee opeenvolgende koersen.

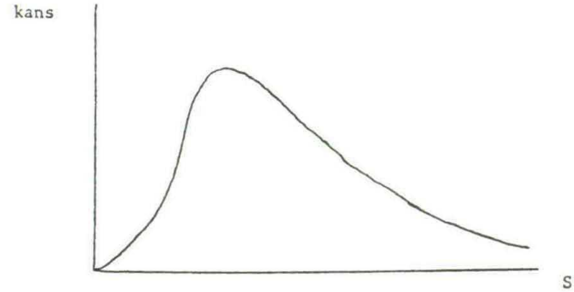
Tabel 6.1 De verdeling van de aandelenkoers.

prijs	kans	prijs	kans	prijs	kans	prijs	kans
10	0,0000	40	0,0261	70	0,0098	100	0,0006
11	0,0000	41	0,0273	71	0,0091	101	0,0005
12	0,0000	42	0,0284	72	0,0084	102	0,0005
13	0,0000	43	0,0292	73	0,0077	103	0,0004
14	0,0000	44	0,0298	74	0,0071	104	0,0004
15	0,0000	45	0,0302	75	0,0065	105	0,0003
16	0.0000	46	0,0304	76	0,0060	106	0,0003
17	0,0000	47	0,0304	77	0,0055	107	0,0003
18	0,0001	48	0,0303	78	0,0050	108	0,0003
19	0,0001	49	0,0299	79	0,0046	109	0,0002
20	0,0002	50	0,0294	80	0,0042	110	0,0002
21	0,0004	51	0,0288	81	0,0038	111	0,0002
22	0,0006	52	0,0280	82	0,0035	112	0,0002
23	0,0010	53	0,0272	83	0,0032	113	0,0001
24	0,0015	54	0,0262	84	0,0029	114	0,0001
25	0,0022	55	0,0252	85	0,0026	115	0,0001
26	0,0030	56	0,0241	86	0,0024	116	0,0001
27	0,0040	57	0,0230	87	0,0022	117	0,0001
28	0,0052	58	0,0219	88	0,0020	118	0,0001
29	0,0066	59	0,0208	89	0,0018	119	0,0001
30	0,0081	60	0,0197	90	0,0016	120	0,0001
31	0,0098	61	0,0185	91	0,0015	121	0,0001
32	0,0117	62	0,0174	92	0,0013	122	0,0001
33	0,0136	63	0,0163	93	0,0012	123	0,0001
34	0,0155	64	0,0153	94	0,0011	124	0,0000
35	0,0175	65	0,0143	95	0,0010	125	0,0000
36	0,0194	66	0,0133	96	0,0009	126	0,0000
37	0,0213	67	0,0124	97	0,0008	127	0,0000
38	0,0230	68	0,0115	98	0,0007	128	0,0000
39	0,0246	69	0,0106	99	0,0006	129	0,0000

In tabel 6.1 is voor een reeks van waarde de daarbij behorende kansdichtheid gegeven. Voor de waarden beneden 10 en boven 123 bestaat de uitkomst, op vier decimalen nauwkeurig, alleen maar nullen. De werkelijke waarde is natuurlijk ongelijk aan nul, maar wel zeer klein. De hoogste kans (0,0304) treedt op in het gebied tussen de waarde 46 en 47. De modus bevindt zich tussen dezelfde twee waarden in. Te bereken valt, dat de modus bereikt wordt bij de waarde 46,045. De gemiddelde waarde wordt gevonden bij 51,5. Het gemiddelde wordt rechts van de top aangetroffen. Dit is het geval bij een verdeling die niet symmetrisch is, maar scheef naar rechts. De mediaan van de verdeling ligt bij de waarde 49,625

In figuur 6.1 wordt een deel van de verdeling weergegeven. Het beeld dat ontstaat is het beeld van de lognormale verdeling.

Figuur 6.1 De kansdichtheidfunctie.



Met behulp van bovenstaand voorbeeld is aangegeven hoe men de verdeling van de aandelenkoersen op een tijdstip in de toekomst kan bepalen, in een wereld met risico-neutraal gedrag. De input gegevens zijn: de huidige aandelenprijs, de tijdsduur tot aan het moment waarop men de verdeling wil weten, de risicovrije rentevoet en de variantie van de logaritmen uit de aandelenrendementen. De verdeling wordt bepaald door de inputgegevens. Daarom is het van belang na te gaan wat er verandert aan de verdeling, indien er wijzigingen optreden in deze inputgegevens. In de volgende paragraaf wordt daarom aandacht geschonken aan de invloed van wijzigingen van de parameters.

6.3 De invloed van wijzigingen in de parameters

6.3.1 Inleiding

In deze paragraaf zal de invloed nagegaan worden van wijzigingen in achtereenvolgens de aandelenprijs, de uitoefenprijs, de rentevoet, de resterende looptijd en tenslotte de onzekerheid op de kansvariabele $N(d_2)$. Om de invloed na te gaan, wordt steeds de afgeleide bepaald van de factor $N(d_2)$ naar de betrokken parameter. Bij de bepaling van de respectievelijke afgeleiden wordt gebruik gemaakt van de regel van Leibniz voor het differentiëren van een integraal (Mood, c.s. [1974]), met als de belangrijkste veronderstelling dat het - onder het integraalteken - een differentieerbare functie betreft. In het geval van de factor $N(d_2)$ is hieraan voldaan.
We gaan dus steeds na wat de invloed is van een wijziging van een parameter op de kans, dat de aandelenprijs aan het einde van het tijdvak boven een bepaalde waarde zal liggen. Deze waarde noemen we in analogie met opties de uitoefenprijs.

6.3.2 Wijzigingen van de aandelenprijs

Indien we de afgeleide bepalen van de factor $N(d_2)$ naar de aandelenprijs krijgen we de volgende uitdrukking:

$$\delta[N(d_2)]/\delta S = Z(d_2) \bullet 1/(S\ \sigma \sqrt{T}) \qquad (6.2)$$

waarin Z(.) = standaardnormale kansdichtheidsfunctie

De uitkomst van relatie 6.2 zal steeds positief zijn. Dan geldt - zoals te verwachten is - dat, indien de aandelenprijs stijgt, de kans op uitoefening stijgt. Naarmate een optie minder out-of-the-money of meer in-the-money is, is de kans groter dat de optie in-the-money eindigt. Ook is de optie meer waard. Dit laatste geldt niet voor alle parameters. We moeten een onderscheid maken tussen de invloed van een wijziging van een parameter op de optieprijs en op de factor $N(d_2)$, (de kans dat de aandelenprijs aan het einde van de looptijd boven de uitoefenprijs komt te liggen).

6.3.3 Wijziging van de uitoefenprijs

De afgeleide die hier een rol speelt geeft aan dat er een negatief verband bestaat tussen de hoogte van de uitoefenprijs en de kans op uitoefening. Deze afgeleide luidt namelijk :

$$\delta[N(d_2)]/\delta E = - Z(d_2) \bullet 1/(E\ \sigma\ \sqrt{T}) \qquad (6.3)$$

De waarde van relatie 6.3 is steeds negatief. Dat wil zeggen dat een verhoging van de uitoefenprijs tot een lagere kans leidt dat de optie in-the-money eindigt. Ook deze uitkomst werd zonder meer verwacht. Ten aanzien van de optiewaarde geldt, dat een verhoging van de uitoefenprijs tot een lagere prijs leidt.

6.3.4 Wijziging van de rentevoet

Het verband tussen wijzigingen van de rentevoet en de kans op uitoefening luidt als volgt:

$$\delta[N(d_2)]/\delta r = Z(d_2) \bullet \sqrt{T}/\sigma \qquad (6.4)$$

Deze uitkomst is steeds positief. Dus een verhoging van de rente leidt tot een hogere kans op uitoefening. Dit komt doordat bij een hogere rentevoet de aangroei van de aandelenprijs hoger wordt

In tabel 6.2 wordt voor een aantal rentestanden de kans weergegeven dat de aandelenprijs aan het einde van de looptijd van de optie boven de huidige prijs komt te liggen. Daarnaast wordt ook de factor d_2 weergegeven.

Tabel 6.2 Het verband tussen rentevoet en de factor $N(d_2)$. (σ^2=0,15 ; S=50)

Rentevoet	$N(d_2)$	d_2
0,00	0,4616	- 0,096
0,005	0,4641	- 0,089
0,01	0,4667	- 0,083
0,015	0,4692	- 0,077
0,02	0,4718	- 0,070
0,025	0,4744	- 0,064
0,03	0,4769	- 0,057
0,035	0,4795	- 0,051
0,04	0,4820	- 0,044
0,045	0,4846	- 0,038
0,05	0,4871	- 0,032
0.055	0,4897	- 0,025
0,06	0,4923	- 0,019
0,065	0,4948	- 0,012
0,07	0,4974	- 0,006
0,075	0,5000	0,000
0,08	0,5025	0,006
0.085	0,5051	0,013
0,09	0,5076	0,019
0,095	0,5102	0,026

Uit tabel 6.2 valt te concluderen dat de kans, dat de aandelenprijs boven de huidige prijs zal komen te liggen, stijgt indien de rentevoet toeneemt. Tevens zien we dat de kans minder dan 50% bedraagt, indien de rente lager is dan 7,5%. Bij een rentevoet van 7,5% is de kans gelijk aan 50%. Bij een hogere waarde voor de rentevoet is de kans groter dan 50%. Dit valt ook af te leiden aan de factor d_2. Indien de rente lager is dan 7,5% is de factor negatief, als de rente hoger is dan 7,5% is de factor positief en bij 7,5 is hij precies gelijk aan nul. Indien d_2 gelijk is aan nul, dan is $N(d_2)$ gelijk aan 0,5. Deze situatie doet zich voor bij at-the-money opties, indien de rentevoet gelijk is aan de helft van de variantie. In hoofdstuk 7 wordt nog terug gekomen op de relatie tussen rentevoet en variantie.

Zoals reeds is aangegeven, is het verband tussen de rentevoet en de kans mede afhankelijk van het verschil tussen aandelenprijs en uitoefenprijs. In onderstaande tabel wordt voor een drietal situaties respectievelijk out-of-the-money, at-the-money en in-the money opties, de kans $N(d_2)$ weergegeven bij een aantal verschillende rentevoeten.

Tabel 6.3 De waarde van $N(d_2)$ voor een aantal combinaties van aandelenprijs en rentevoet.

	Rentevoet				
aandelenprijs	0,00	0,025	0,05	0,075	0,095
40	0,1047	0,1106	0,1168	0,1232	0,1286
50	0,4616	0,4744	0,4871	0,5000	0,5102
60	0,8024	0,8112	0,8198	0,8281	0,8345

Ook uit deze tabel blijkt dat de kans stijgt indien de rentevoet toeneemt. Dit geldt zowel voor out-of-the-money, at-the-money als voor in-the-money opties. Ook zien we dat de procentuele invloed van een wijziging in de rentevoet het grootst is bij out-of-the-money opties. Indien de aandelenkoers al een eind boven de uitoefenprijs ligt is de invloed van een wijziging van de rentevoet op de kans dat de aandelenkoers boven de uitoefenprijs blijft aan het einde van de looptijd niet zo groot. Voor wat de waarde van een optie betreft geldt dat een verhoging van de rentevoet een verhoging van de prijs tot gevolg heeft.

6.3.5 Wijziging in de resterende looptijd

Van belang is na te gaan hoe de waarde van de kansgrootheid verloopt indien de resterende looptijd verandert. Indien al de overige factoren ongewijzigd blijven, zal bij een optie de resterende looptijd steeds kleiner worden. De afgeleide die het verband tussen de kans op uitoefening en resterende looptijd aangeeft, luidt:

$$\delta[N(d_2)]/\delta T = - Z(d_2) \bullet 1/(2T) \bullet [\{\ln(S_t/E) - (r-\sigma^2/2)T\}/(\sigma \sqrt{T})]$$

$$= - Z(d_2) \bullet 1/(2T) \bullet d_2 \qquad (6.5)$$

Van belang is na te gaan wat het teken is van deze uitdrukking. Het teken kan negatief, gelijk aan nul of positief zijn. Laten we eerst eens kijken naar de situatie van at-the-money opties. Dan geldt dat $\ln(S_t/E)$ gelijk is aan nul. Het teken wordt dan bepaald door de term:

$$-1/(2T) \; [\; \{-(r-\sigma^2/2)T\}/(\sigma \sqrt{T}) \qquad (6.6)$$

Van belang is hier het verband tussen de hoogte van de rentevoet en de variantie. Indien de rentevoet groter is dan de helft van de variantie (dit betekent een relatief lage onzekerheid), is de uitkomst van de term 6.6 positief. Een verlaging van de resterende looptijd leidt dan tot een lagere waarde van $N(d_2)$ en dus tot een lagere kans dat de optie in-the-money eindigt. Is de onzekerheid echter relatief groot, dat wil zeggen groter dan twee maal de rentevoet, dan is de uitkomst van 6.6 negatief. In deze situatie leidt een verlaging van de resterende looptijd tot een verhoging van de kans.

Indien de optie in-the-money is zal bij een relatief lage onzekerheid en een relatief lange looptijd de mogelijkheid aanwezig zijn dat de uitkomst van 6.6 positief is. Is de optie een eind in-the-money of is de onzekerheid relatief groot of de resterende looptijd kort, dan zal de uitkomst van 6.6 steeds negatief zijn. Dan leidt een verlaging van de resterende looptijd tot een verhoging van de kans dat de aandelenprijs op het einde van de looptijd boven de uitoefenprijs komt.

Als de optie out-of-the-money is geldt ook dat er de mogelijkheid aanwezig is dat de uitkomst van 6.6 negatief is. Dit kan onder omstandigheden van een relatief grote onzekerheid, een klein verschil tussen aandelenprijs en uitoefenprijs en een relatief lange looptijd het geval zijn. In de meeste gevallen zal de uitkomst positief zijn. In het algemeen hangt de uitkomst van vergelijking 6.5 af van het teken van:

$$\ln(S_t/E) - (r-\sigma^2/2)T \tag{6.7}$$

We kunnen nu schrijven:

Als $\ln(S_t/E) > (r-\sigma^2/2)T$ dan is de afgeleide negatief,
als $\ln(S_t/E) < (r-\sigma^2/2)T$ dan is de afgeleide positief.

of als $S_t/E > \exp\,(r-\sigma^2/2)T$ dan is de afgeleide negatief
als $S_t/E < \exp\,(r-\sigma^2/2)T$ dan is de afgeleide positief.

(6.8)

In tabel 6.4 wordt een aantal voorbeelden gegeven van de invloed van een wijziging van de resterende looptijd op de kans.

Tabel 6.4 Voorbeelden van invloed van wijziging van resterende looptijd op kans. (σ^2 = 0,15).

Rest. looptijd in dagen	rentevoet r=6%	r=7,5%	r=9%
1	0,4991	0,5	0,5008
50	0,4942	0,5	0,5057
100	0,4919	0,5	0,5080
150	0,4900	0,5	0,5099
200	0,4885	0,5	0,5114
250	0,4871	0,5	0,5128
300	0,4859	0,5	0,5140
350	0,4848	0,5	0,5151
400	0,4838	0,5	0,5161

Uit tabel 6.4 is op te maken dat bij een rentevoet van 0,06 de waarde van de factor $N(d_2)$ daalt indien de resterende looptijd toeneemt. Dit wil zeggen dat de kans, dat de aandelenprijs over T dagen boven de huidige aandelenprijs zal liggen, kleiner is dan 0,5, maar ook dat de kans steeds kleiner wordt, indien het aantal dagen toeneemt. Is de rentevoet gelijk aan 0.075 - dit is de situatie waarbij de rentevoet in getalwaarde gelijk is aan de helft van de variantie - dan is de kans, dat de aandelenprijs boven de huidige prijs uitkomt in de toekomst, steeds gelijk aan 0,5 en onafhankelijk van het aantal dagen.
Bij een rentevoet die groter is dan de helft van de variantie (hier r=0,075) zien we dat de kans steeds groter is dan 0,5 en tevens, dat de kans, dat de aandelenprijs boven de huidige prijs komt te liggen, hoger wordt naarmate de tijd langer wordt.

Vervolgens willen we nagaan, hoe groot de kans is dat de aandelenprijs in de toekomst komt te liggen boven een bepaalde waarde, die ongelijk is aan de huidige prijs. In tabel 6.5

wordt voor twee waarden gekeken naar deze kans. De waarden zijn 49,10 en 51. In dit voorbeeld handhaven we de rentevoet steeds op 6% maar wijzigen de onzekerheid. In optietermen gaat het om een optie die net in-the-money of net out-of-the-money is.

Tabel 6.5 De kans dat de aandelenprijs boven 49,1 respectievelijk 51 komt te liggen bij toenemend aantal dagen, indien de huidige prijs gelijk is aan 50.

Resterende looptijd in dagen	variantie $\sigma^2 = 0,05$		$\sigma^2 = 0,15$		$\sigma^2 = 0,20$	
	aandelenprijs					
	49,1	51	49,1	51	49,1	51
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	0,9403	0,0463	0,8140	0,1641	0,7794	0,1978
50	0,6091	0,4282	0,5466	0,4394	0,5304	0,4393
100	0,5936	0,4653	0,5275	0,4530	0,5122	0,4477
150	0,5897	0,4850	0,5192	0,4583	0,5023	0,4497
200	0,5892	0,4986	0,5137	0,4610	0,4954	0,4498
250	0,5900	0,5091	0,5097	0,4626	0,4899	0,4492
300	0,5915	0,5177	0,5065	0,4635	0,4854	0,4482
350	0,5934	0,5251	0,5039	0,4640	0,4815	0,4471
400	0,5954	0,5317	0,5016	0,4643	0,4780	0,4459

Ter toelichting van tabel 6.5 kan het volgende worden opgemerkt. Bezien we eerst de kans dat de huidige aandelenprijs (50) boven 49,10 zal komen als functie van de looptijd. In kolom 2 zien we dat deze kans eerst daalt maar, indien de resterende looptijd langer wordt, weer gaat stijgen (vergelijk 200 dagen met 250 dagen). In kolom 4 bij een variantie van 0,15 zien we de kans steeds dalen, terwijl in kolom 6 de kans ook steeds daalt. Bij de situatie in kolom 4 ligt de

kans eerst boven 50%, maar bij verlenging van de looptijd daalt deze kans beneden de 50%. Dit is ook het geval bij kolom 6, alleen liggen de kansen hier steeds lager dan bij de situatie weergegeven in kolom 4. De invloed van de variantie, die hier een rol speelt, wordt in de volgende subparagraaf besproken.
Bezien we nu de kolommen waarbij de aandelenprijs op de waarde 51 is gesteld. De kans dat de aandelenprijs in de loop van de tijd boven 51 komt te liggen is volgens kolom 3 een stijgende functie van de tijd. In kolom 5 zien we ook een stijgend functie, zij het wel dat de kans steeds kleiner is dan bij kolom 3. In kolom 7 wordt een situatie weergegeven waarbij de kans dat de aandelenprijs boven de 51 komt te liggen in de loop van de tijd aanvankelijk stijgt, maar indien de tijd langer wordt weer gaat dalen (vergelijk 200 dagen met 250 dagen). De kans ligt in kolom 7 wel steeds onder 50%.
Samenvattend kunnen we stellen dat in sommige gevallen de kans een stijgend verloop heeft, soms een dalend verloop, maar ook is het mogelijk dat de kans eerst toeneemt en daarna weer daalt of eerst daalt en vervolgens weer toeneemt. Dit geldt bij een lange resterende looptijd. Indien we bij een aandeel kijken naar de kansen dat de prijs op een bepaalde datum boven een bepaalde waarde uitkomt geldt het omgekeerde beeld indien we dit aandeel volgen in de loop van de tijd. De resterende looptijd wordt dan steeds korter.

N.B. De waarde van een call optie is wel steeds positief gerelateerd aan de resterende looptijd. Hoe langer de resterende looptijd, hoe hoger de waarde van de call optie. We zien hier een voorbeeld dat aangeeft dat er een verschil is in invloed van een wijziging van een parameter op de waarde van een optie en de waarde van de kans dat de aandelenprijs boven een bepaalde waarde uitkomt.

Zoals reeds is aangegeven speelt ook het niveau van de variantie, vooral in samenhang met het niveau van de rentevoet een belangrijke rol. In de volgende subparagraaf wordt daarom aandacht geschonken aan de invloed van wijzigingen van de variantie op de kans op uitoefening.

6.3.6 Wijziging van de onzekerheid

Als laatste wordt aandacht geschonken aan het verband tussen wijzigingen in de onzekerheid en de kans op uitoefening. Wiskundig luidt dit verband:

$$\delta[N(d_2)]/\delta\sigma = - Z(d_2) \cdot d_1/\sigma \qquad (6.9)$$

Ook hier geldt dat het niet zonder meer te zeggen is of er een positief of een negatief verband bestaat tussen een wijziging van de onzekerheid en de kans dat de aandelenprijs boven de uitoefenprijs eindigt. Het teken hangt af van het tekenverloop van de factor d_1. Voor in-the money en at-the money opties geldt, dat d_1 positief is en dan is de afgeleide dus negatief. Een vergroting van de onzekerheid leidt dan tot een daling van de kans dat de optie in-the-money eindigt. Voor out-of-the-money opties bestaat de mogelijk dat d_1 negatief wordt en dan is de afgeleide positief. Een vergroting van de onzekerheid leidt dan tot een verhoging van de kans op uitoefening. In tabel 6.7 wordt voor een at-the-money optie de waarde van d_1 en de afgeleide en $N(d_2)$ weergegeven.

Tabel 6.7 De invloed van wijzigingen van de onzekerheid bij at-the-money opties (S=E, r=6%).

Variantie	d_1	afgeleide	$N(d_2)$
0.01	0,457	- 1,692	0,651
0,02	0,348	- 0,952	0,598
0,03	0,304	- 0,690	0,572
0,04	0,281	- 0,556	0,556
0,05	0,267	- 0,474	0,544
0,06	0,258	- 0,419	0,534
0,07	0,252	- 0,380	0,526
0,08	0,248	- 0,350	0,520
0,09	0,246	- 0,327	0,514
0,10	0,245	- 0,309	0,509
0,11	0,244	- 0,293	0,504
0,12	0,244	- 0,281	0,500
0,13	0,244	- 0,270	0,496
0,14	0,244	- 0,260	0,493
0,15	0,245	- 0,252	0,489
0,16	0,246	- 0,245	0,486
0,17	0,247	- 0,239	0,483
0,18	0,248	- 0,233	0,480
0,19	0,250	- 0,228	0,477
0,20	0,252	- 0,224	0,475

Uit bovenstaande tabel blijkt dat een vergroting van de onzekerheid voor een at-the-money optie tot een verlaging van de kans leidt dat de optie op het einde van de looptijd in-the-money eindigt. Anders geformuleerd: de kans dat de aandelenprijs boven de huidige prijs komt te liggen in de loop van de tijd wordt kleiner indien de onzekerheid toeneemt. Verder geldt dat de waarde van de afgeleide van de factor $N(d_2)$ naar de variantie een dalende functie is van de variantie (zie kolom 3 van tabel 6.7). De invloed van een wijziging van de variantie wordt steeds kleiner. Het verloop

van de variabele d_1 is eerst dalend bij een toename van de onzekerheid, maar voorbij een bepaalde waarde van de variantie stijgt de hedge ratio weer. We zien hier weer het reeds eerder aangegeven effect van het verband tussen de hoogte van de rentevoet en de variantie. Bij een onzekerheid in termen van variantie die kleiner is dan twee maal de rentevoet is de kans groter dan 50%, terwijl bij een variantie die groter is dan twee maal de rentevoet de kans dat de aandelenprijs boven de huidige prijs komt te liggen in de loop van de tijd, kleiner is dan 50%.
Indien we een uitoefenprijs van 60 in plaats van 50 zouden nemen (out-of-the-money optie) zien we een ander verband tussen de grootheden. Allereerst geldt dat de afgeleide steeds positief is. Een vergroting van de onzekerheid leidt tot een grotere kans op uitoefening. De absolute waarde van de afgeleide stijgt eerst om vervolgens weer te dalen.

In het algemeen geldt dat indien de uitoefenprijs minstens een aantal procenten boven de aandelenprijs ligt, de kans op uitoefening daalt, als de onzekerheid toeneemt. Ligt de uitoefenprijs lager dan geldt het omgekeerde. Het omslagpunt ligt bij die verhouding uitoefenprijs/aandelenprijs waarbij d_1 gelijk is aan nul. Het omslagpunt hangt af van:

$$\ln (S_t/E) + (r+\sigma^2/2)T = 0 \qquad (6.10)$$

Als $S_t/E > \exp\{-(r+\sigma^2/2)\ T\}$, dan is de afgeleide negatief
als $S_t/E < \exp\{-(r+\sigma^2/2)\ T\}$, dan is de afgeleide positief.

We zien hier nogmaals naar voren komen dat voor at-the-money en voor in-the-money opties de afgeleide steeds negatief is. Hierbij geldt namelijk dat een vergroting van de onzekerheid steeds leidt tot een verlaging van de kans dat de aandelenprijs boven de uitoefenprijs zal uitstijgen. Slechts in het geval van opties die voldoende out-of-the-money zijn, is de afgeleide positief en zal een vergroting van de onzekerheid leiden tot een hogere kans. Hier geldt ook dat hoe langer de looptijd, hoe meer de optie out-of-the-money moet zijn opdat de afgeleide positief is. Hetzelfde geldt voor de rentevoet. Hoe hoger de rentevoet hoe meer out-of-the-money de optie moet zijn.

Kan er zowel een positief als een negatief verband bestaan tussen een wijziging van de onzekerheid en de kans dat de aandelenprijs boven de uitoefenprijs eindigt, tussen de waarde van een optie en een wijziging van de onzekerheid geldt steeds een positief verband. Hoe groter de onzekerheid, hoe hoger de waarde van een optie. We zien hier weer een gevolg van de afgekapte verdeling. De optie heeft alleen waarde indien de aandelenprijs boven de uitoefenprijs eindigt. Voor alle aandelenprijzen beneden de uitoefenprijs is de optie waardeloos aan het einde van de looptijd. De kans dat de aandelenprijs boven de uitoefenprijs komt te liggen aan het einde van de looptijd wordt wel kleiner, maar als de aandelenprijs boven de uitoefenprijs komt, kan de prijs door de grotere waarde van de variantie hogere waarden aannemen. In het binomiale model wordt dit duidelijker: bij een hogere variantie, zijn er ook hogere aandelenkoersen mogelijk. Voor de continue verdeling geldt dat de kans op hogere aandelenprijzen groter wordt.

6.4 Samenvatting en conclusies

We willen in tabel 6.8 een aantal van de eerder beschreven situaties samenvatten. Zowel een verschil in onzekerheid (variantie van respectievelijk 0.05; 0,12; 0,15 en 0,25), als een verschil in looptijd (respectievelijk 3, 6, 9 en 12 maanden) alsmede een verschil in uitoefenprijs (uitoefenprijzen van 41,67; 49,1; 50; 51 en 60 gulden) wordt in beschouwing genomen. De huidige aandelenprijs is f50. Het betreft dan een optie die respectievelijk ver in-the-money, een beetje in-the-money, at-the-money, een beetje out-of-the-money, en ver out-of-the-money is. Een verschil in uitoefenprijs is vergelijkbaar met een verschil in de aandelenprijs, daar het quotiënt van aandelenprijs/uitoefenprijs van belang is. Zoals al eerder is aangegeven bestaat er ook een verband tussen rentevoet en variantie. Daarom is voor de rentevoet steeds dezelfde waarde gebruikt (6%). Tevens wordt in deze tabel de waarde aangegeven van een call optie op het aandeel.

Tabel 6.8 Verschillende combinaties.(r=0,06, S=50)

looptijd	onzekerheid = variantie							
in dagen	0,05		0,12		0,15		0,25	
	kans	optie	kans	optie	kans	optie	kans	optie
A			Uitoefenprijs = 41,67					
91	0,9562	9,03	0,8536	9,45	0,8216	9,65	0,7466	10,33
182	0,8967	9,86	0,7715	10,73	0,7382	11,10	0,6640	12,22
273	0,8591	10,67	0,7282	11,89	0,6949	12,37	0,6210	13,80
364	0,8343	11,46	0,7005	12,93	0,6670	13,50	0,5926	15,17
B			Uitoefenprijs = 49,10					
91	0,5951	3,10	0,5417	4,27	0,5296	4,66	0,5030	5,75
182	0,5892	4,39	0,5295	6,03	0,5155	6,57	0,4838	8,09
273	0,5907	5,47	0,5241	7,44	0,5082	8,10	0,4718	9,93
364	0,5939	6,42	0,5209	8,66	0,5032	9,42	0,4626	11,40
C			Uitoefenprijs = 50					
91	0,5311	2,60	0,5	3,81	0,4922	4,21	0,4740	5,32
182	0,5440	3,90	0,5	5,58	0,4890	6,14	0,4633	7,68
273	0,5539	4,97	0,5	7,00	0,4866	7,67	0,4551	9,53
364	0,5621	5,93	0,5	8,23	0,4845	9,00	0,4482	11,11
D			Uitoefenprijs = 51					
91	0,4606	2,12	0,4544	3,34	0,4515	3,75	0,4426	4,87
182	0,4941	3,39	0,4677	5,11	0,4602	5,68	0,4411	7,24
273	0,5132	4,46	0,4736	6,53	0,4631	7,22	0,4371	9,10
364	0,5270	5,42	0,4772	7,77	0,4641	8,55	0,4326	10,69
E			Uitoefenprijs = 60					
91	0,0602	0,18	0,1462	0,83	0,1683	1,13	0,2135	2,04
182	0,1486	0,76	0,2283	2,14	0,2441	2,66	0,2717	4,16
273	0,2101	1,46	0,2716	3,37	0,2819	4,05	0,2967	5,97
364	0,2549	2,18	0,2993	4,52	0,3052	5,32	0,3104	7,57

In tabel 6.8 zien we een reeks van combinaties van uitoefenprijzen, looptijden en onzekerheden. Aan de hand van de uitkomsten in deze tabel willen we een aantal conclusies, zoals deze in de vorige subparagrafen zijn afgeleid nog eens samenvatten. Onze aandacht gaat vooral uit naar de invloed van wijzigingen op de grootheid $N(d_2)$. Deze geeft, zoals reeds eerder vermeld, in een wereld met risiconeutraal gedrag de kans aan dat de aandelenprijs aan het einde van de looptijd boven een bepaalde waarde (de uitoefenprijs) zal uitkomen. Daarnaast hebben we in tabel 6.8 ook de waarde weergegeven van een Europese calloptie op een in de beschouwde periode niet-dividend betalend aandeel. Dit is mede gedaan om aan te tonen dat de invloed van wijzigingen van de parameters niet steeds hetzelfde effect hebben op de kansgrootheid en de waarde van de optie. Ten aanzien van de optie geldt dat de optie in waarde stijgt, indien de looptijd langer wordt, de onzekerheid toeneemt of de uitoefenprijs lager is. Dit is eenvoudig in de tabel af te lezen. Met enige goede wil kunnen we ook stellen dat de invloed van de verlenging van de resterende looptijd van 91 naar 364 dagen op de waarde van de optie even groot is als die van een verhoging van de variantie van 0,05 naar 0,25 bij een looptijd van 91 dagen.

Laten we nu eens onze aandacht richten op de waarde van de factor $N(d_2)$. Allereerst de invloed van de hoogte van de waarde waarboven de aandelenprijs moet komen aan het einde van de looptijd. Er geldt dat hoe hoger die waarde, hoe kleiner de kans op uitoefening: vergelijk overeenkomstige situaties in de blokken A tot en met E.
Nu de looptijd. Hier zien we een gemengd beeld. Soms geeft een verlenging van de looptijd een verlaging van de kansgrootheid (zie bijvoorbeeld blok A), soms een verhoging van de kansgrootheid (zie blok E) en soms komen beide gevolgen voor (zie blokken B, C en D). In blok B bij een variantie van 0,05 zien we eerst een daling bij verlenging van de looptijd, maar vervolgens weer een stijging. In blok C constateren we bij een variantie van 0,05 een stijging, bij 0,12 een stabiel

blijven en bij een hogere variantie een daling. Blok C geeft de situatie, dat de prijs aan het einde boven de huidige prijs ligt. In optietermen hebben we hier een at-the-money optie. Het stabiel blijven van de kans op 50% is het geval waarbij de variantie in getalswaarde gelijk is aan twee maal de rentevoet. In het algemeen geldt dat, indien de uitoefenprijs laag ligt ten opzichte van de huidige aandelenkoers, een verlenging van de looptijd tot een verlaging van de kans leidt. Ligt de uitoefenprijs hoog ten opzichte van de huidige aandelenprijs, dan leidt een verlenging van de looptijd tot een verhoging van de kans. Ligt de uitoefenprijs ver onder de huidige aandelenprijs, dan zal bij een lage waarde van de onzekerheid een niet te grote verlenging van de looptijd leiden tot een verlaging van de kans, maar een grote verlenging van de looptijd weer leiden tot een stijging van de kans. Bij een hoge waarde van de onzekerheid leidt een verlenging looptijd van de onzekerheid tot een verlaging van de kans. Ligt de uitoefenprijs net boven de huidige aandelenprijs, dan leidt bij een lage variantie een verlenging van de looptijd tot een stijging van de kans, maar bij een hoge waarde van de variantie tot een daling van de kans.

Bezien we de invloed van een wijziging van de variantie op de waarde van $N(d_2)$, dan kunnen we constateren, dat een verhoging van de onzekerheid leidt tot een verlaging van de kans (zie de blokken A t/m D). Alleen indien de uitoefenprijs ver boven de huidige aandelenkoers ligt leidt een verhoging van de onzekerheid tot een verhoging van de kans (zie blok E).

HOOFDSTUK 7 OPTIE-THEORIE EN CAPM, DE FACTOR N(d_3)

7.1 Inleiding

In de eerste hoofdstukken hebben we aandacht geschonken aan de verdeling van aandelenkoersen en langs de weg van de indices zijn we toen aangeland bij het CAPM. In hoofdstuk 4 zijn waarden bepaald voor de bèta's van aandelen. Met behulp van de bèta-coëfficiënt (β), de risicovrije rentevoet (R_F) en het rendement van marktindex (R_M) is het mogelijk om het geëiste rendement van de aandeelhouder te bepalen. Het CAPM is een evenwichtsmodel. In de evenwichtssituatie zal het geëiste rendement van de aandeelhouder gelijk zijn aan het verwachte rendement. Via het verwachte rendement en de gegeven huidige aandelenprijs is het mogelijk de verwachte aandelenprijs aan het einde van de periode te bepalen. Deze zal namelijk gelijk zijn aan:

$$S_T = (1+R_j) \cdot S_t \qquad (7.1)$$

waarin: S_T = verwachte aandelenprijs aan het einde van T subperioden

R_j = geëiste rendement (= verwacht rendement) voor aandeel j

S_t = huidige aandelenprijs.

In de hoofdstukken 5 en 6 is aandacht geschonken aan de theorie van opties. Daar bleek onder andere dat het in een risico-neutrale wereld mogelijk is om de verdeling van de toekomstige aandelenprijs te bepalen met behulp van de factor N(d_2). Ook is de invloed nagegaan van wijzigingen in de parameters van de factor N(d_2) op de waarde van deze kansgrootheid. In dit hoofdstuk worden de twee verschillende benaderingen aan elkaar gekoppeld.

In paragraaf 7.2 zal eerst aandacht worden geschonken aan het begrip risico-neutraliteit. In de volgende paragraaf wordt dan de lognormale verdeling van de aandelenkoersen nader onderzocht. In paragraaf 7.4 wordt dan een koppeling uitgewerkt van het CAPM aan de optiewaardering of beter gezegd tussen het CAPM en de kans, dat de aandelenkoers boven een bepaalde waarde komt te liggen in de loop van de tijd. We maken daar de overstap van een wereld met risico-neutraal gedrag naar een wereld van risico-mijders.

7.2 Het "risico-neutraliteit"-argument

In de economische wetenschap wordt bij het beschrijven van het gedrag van economische subjecten meestal uitgegaan van risico-afkeer. Hieronder verstaan we dat een economisch subject risico negatief waardeert. Hij is best bereid risico te lopen, mits dit maar gecompenseerd wordt door een hogere verwachte opbrengst dan in de situatie zonder risico. Toegespitst op aandelen wil dit zeggen dat indien er risico kleeft aan een belegging in een aandeel, dit gecompenseerd dient te worden door een hogere verwachte opbrengst. Hoe groter het risico, hoe groter ook de vergoeding moet zijn in termen van de verwachte opbrengst. Is de verwachte opbrengst onvoldoende om het grotere risico te compenseren, dan zullen beleggers besluiten dit aandeel te verkopen. Door het grotere aanbod van die aandelen, waartegenover geen vraag staat, zal vervolgens de koers dalen. Door de koersdaling stijgt de verwachte opbrengst. Dit proces gaat zolang door totdat de ver-wachte opbrengst (na de koersdaling) voldoende is om het gestegen risico te compenseren.
In een risico-neutrale wereld behoeft dit niet gecompenseerd te worden door een hogere verwachte opbrengst. De beslisser heeft in deze wereld geen waardering voor risico (anders gezegd, hij waardeert risico gelijk aan nul). In deze wereld zal de verwachte opbrengst van alle objecten, zowel risicovrij als risicodragend, gelijk zijn aan de risicovrije ren-

tevoet. Echter in de wereld van risico-mijders zal de verwachte opbrengst alleen gelijk zijn aan de risicovrije rentevoet, indien er géén risico aanwezig is.

De waarderingsformule voor opties zoals afgeleid door Black & Scholes gaat uit van de mogelijkheid een portefeuille samen te stellen bestaande uit aandelen en opties, zodanig dat deze portefeuille -de zogenaamde hedge portefeuille - geen risico bevat. De waarde van deze portefeuille moet dan bij evenwicht in een risico-neutrale en in een risico-mijdende wereld aan elkaar gelijk zijn. De verwachte opbrengst is in beide gevallen gelijk aan de risicovrije rentevoet. We kunnen de waarde van de portefeuille in beide werelden vaststellen. We zullen dan die wereld nemen waarin dit het eenvoudigst is. Dit is vaak de risico-neutrale wereld. Bovenvermelde aanpak noemt men wel het "risico-neutraliteit"-argument.
Daar de waarde van de portefeuille in beide werelden gelijk is en de aandelenprijs gegeven is, volgt hieruit dat de waarde van een call optie in beide werelden gelijk moet zijn. Deze waarde is dan gelijk aan de tegen de risicovrije rentevoet gedisconteerde verwachte waarde van de call aan het einde van de looptijd.

Het is een misverstand[9] om te veronderstellen dat de aandelenkoers in het model van Black & Scholes stijgt met de risicovrije rentevoet, indien er sprake is van risico-mijdend gedrag. Niet een aandelenbelegging heeft naar verwachting een opbrengst gelijk aan de risicovrij rentevoet, maar een portefeuille die zodanig is samengesteld dat die portefeuille geen risico meer bevat. De verwachte opbrengst van de aandelenbelegging is dan, in een situatie van géén dividenden in de betrokken periode, gelijk aan de verwachte koersstijging

9. Indien men de term $N(d_2)$ uitlegt als de kans dat de aandelenprijs komt te liggen boven de uitoefenprijs in een risicomijdende wereld, veronderstelt men impliciet, dat de aandelenprijs aangroeit met de risicovrije rentevoet. Zie voor voorbeelden de bijlage aan het einde van hoofdstuk 8.

en deze is weer gelijk aan de risicovrije rentevoet verhoogd met een opslag voor het risico.

7.3 De lognormale verdeling

Van belang is de verdeling van de aandelenprijs in de toekomst. Ook de verwachte waarde van de aandelenprijs speelt een belangrijke rol. Steeds gaat het om een model dat de ontwikkeling van de aandelenprijs beschrijft in de loop van de tijd. Zoals in hoofdstuk 2 reeds is aangegeven, kan de lognormale verdeling een goede beschrijving geven van de aandelenkoersen. De lognormale verdeling van aandelenkoersen veronderstelt dat de logaritmen van de opbrengsten van de aandelen normaal verdeeld zijn. Er geldt dan[10]:

$$\ln(S_{t+\Delta t}/S_t) = \mu \bullet \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \bullet Z \qquad (7.2)$$

waarin: $S_{t+\Delta t}$ = aandelenprijs op tijdstip $t+\Delta t$

S_t = huidige aandelenprijs

μ = gemiddelde van de logaritmische opbrengsten per tijdseenheid

σ = de standaarddeviatie van de logaritmische aandelenopbrengsten per tijdseenheid.

Z = standaardnormale variabele met verwachtings waarde 0 en variantie 1.

Δt = tijdsinterval.

De uitdrukking 7.2 geeft aan dat de aandelenopbrengst te schrijven is in een constant deel en een variabel deel. De constante opbrengst is gelijk aan het produkt van de gemiddelde logaritmische opbrengst per tijdseenheid en het aantal tijdseenheden. Het stochastische deel van de opbrengst hangt af van het produkt van de standaarddeviatie van de logaritmen uit de opbrengsten, de wortel uit het tijdsinterval en de factor Z. Dit laatste deel is een zogenaamd Wienerproces.

---

10. Een deel van de volgende analyse is ontleend aan Jarrow en Rudd [1983].

Indien we in relatie 7.2 het linker en het rechter deel van het "gelijk" teken tot de e-macht (exp) verheffen, krijgen we, na herschrijving:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \bullet \exp [\mu \bullet \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \bullet Z] \qquad (7.3)$$

Deze relatie geeft aan dat over een tijdsinterval Δt de aandelenprijs zich ontwikkelt als de som van de reeds eerder genoemde constante factor en de stochastische factor. De uitdrukking e^x is te ontwikkelen als:

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \ldots.$$

Indien we hiervan gebruik maken bij de uitdrukking van relatie 7.3, daarbij de termen van hogere orde dan twee verwaarlozen en tevens de termen van Δt van hogere orde dan één verwaarlozen, dan krijgen we:

$$S_{t+\Delta t} / S_t = (\mu + \sigma^2/2) \cdot \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \bullet Z \qquad (7.4)$$

Deze relatie is te beschouwen als de continue versie van vergelijking 7.2. Gebruikmakend van de uitdrukkingen 7.2, 7.3 en 7.4 is het mogelijk de volgende uitkomsten af te leiden:

$$E [\ln(S_{t+\Delta t} / S_t)] = \mu \bullet \Delta t \qquad (7.5)$$
$$Var [\ln(S_{t+\Delta t} / S_t)] = \sigma^2 \bullet \Delta t \qquad (7.6)$$
$$E [S_{t+\Delta t}] = S_t \exp[\alpha \bullet \Delta t] \qquad (7.7)$$

waarin $\alpha = \mu + \sigma^2/2$ = de gemiddelde aandelenopbrengst per tijdseenheid

Samenvattend kunnen we stellen, dat uitgaande van lognormaal verdeelde aandelenkoersen de verwachte aandelenkoers te schrijven is als:

$$E (S_{t+\Delta t}) = S_t \bullet \exp(\alpha \bullet \Delta t) = S_t \bullet \exp[(\mu + \sigma^2/2) \bullet \Delta t] =$$
$$S_t \bullet E\{\exp[\mu \bullet \Delta t + \sigma \bullet \sqrt{\Delta t} \bullet Z]\} \qquad (7.8)$$

Van belang is de relatie $\alpha = \mu + \sigma^2/2$. In een wereld waarin sprake is van risico-neutraliteit geldt dat α gelijk is aan de risicovrije rentevoet. Er geldt dan:

$$\alpha = r = \mu + \sigma^2/2 \tag{7.9}$$

waarin r = risicovrije rentevoet per tijdseenheid.

In deze situatie is de verwachte prijs van bijvoorbeeld een aandeel op tijdstip $t+\Delta t$ ($E[S_{t+\Delta t}]$), gelijk aan de huidige prijs (S_t) maal $\exp(\alpha \bullet \Delta t)$. Daar α gelijk is aan r zal de aandelenprijs naar verwachting dus aangroeien met de risicovrije rentevoet. Deze aangroei is afhankelijk van de combinatie van de verwachte waarde (μ) en de variantie van de logaritmische aandelenopbrengsten (σ^2). Dit houdt in dat voor verschillende aandelen de verdeling van de logaritmische opbrengsten verschillend kan zijn, maar de verwachte waarde van de aandelenprijs over een bepaalde periode dezelfde waarde kan hebben. Anders geformuleerd: er zijn een hele reeks lognormale verdelingen van de aandelenprijs mogelijk met alle dezelfde verwachte waarde, maar uiteenlopende varianties.

Indien de variantie van de logaritmische aandelenopbrengsten stijgt zonder wijziging van de risicovrije interestvoet, houdt dit tevens in dat het gemiddelde daarvan daalt (zie relatie 7.9). Op dit verband komen we later nog terug. Een andere opmerking die hier van belang is betreft de situatie dat de waarde van μ gelijk aan nul wordt. Dit is het geval indien geldt dat de risicovrije interestvoet in getalwaarde gelijk is aan de helft van de variantie. Dit verband tussen variantie en rentevoet zijn we in hoofdstuk 6 al meerdere malen tegengekomen. Onder die omstandigheden geldt dat de verwachte waarde van de logaritmische aandelenopbrengsten gelijk is aan nul. Dat wil zeggen dat de verwachtingswaarde van de verdeling links en rechts van de waarde nul aan elkaar gelijk zijn. Wat houdt dit in voor de verdeling van de aandelenprijzen op tijdstip $t+\Delta t$? Dat betekent dat de mediaan van de verdeling op tijdstip $t+\Delta t$ gelijk is aan de huidige aandelenprijs. De verdeling van de kansmassa van de toekomstige koers heeft als centrum de huidige koers.

Indien we het bovenstaande toepassen in het optie model, dan wil dit zeggen dat in deze situatie de factor $N(d_2)$ bij een uitoefenprijs die gelijk is aan de huidige koers, de waarde 0,50 heeft. De waarde van d_2 is dan gelijk aan nul. De optie zal naar verwachting at-the-money eindigen. Indien de rentevoet niet gelijk is aan de helft van de variantie, treedt er een andere verdeling op in de kansmassa, oftewel de waarde van de mediaan verandert. In de situatie dat de rentevoet groter is dan de helft van de variantie, of bij een kleinere onzekerheid, is μ groter dan nul. De verdeling van de logaritmische aandelenopbrengsten verschuift naar rechts, maar de top, die links van de mediaan ligt, heeft een grotere kansdichtheid. Het gevolg zal zijn dat de mediaan van de aandelenkoersverdeling naar links beweegt. De waarde van de factor $N(d_2)$ krijgt voor een uitoefenprijs gelijk aan de huidige aandelenkoers bij een hogere rentevoet een hogere waarde. (zie tabel 6.3).
In de situatie dat de onzekerheid groter wordt dan twee maal de rentevoet krijgen we het omgekeerde beeld. De verwachte waarde van de logaritmische aandelenopbrengsten wordt negatief. De verdeling van de opbrengsten verschuift naar links en daardoor verschuift de mediaan van de toekomstige aandelenprijs naar rechts. De waarde van $N(d_2)$ wordt kleiner voor at-the-money opties. We kunnen dit ook op een iets andere wijze toelichten. Hiertoe willen we de kans vaststellen dat de aandelenprijs op het einde van de looptijd van de optie (S_T) boven de uitoefenprijs zal liggen. Indien we deze kans p noemen gaat het dus om:

$$p = \text{kans } [\ S_T > E\ ].$$

Gebruikmakend van relatie 7.2[11] kunnen we de koers S_T als volgt schrijven:

$$S_T = S_t \exp[\mu\ T + \sigma \sqrt{T} \cdot Z] \qquad (7.10)$$

zodat geldt: $p = \text{kans}\ [S_t \cdot \exp\ (\mu T + \sigma \sqrt{T} \cdot Z) > E]$ (7.11)

Indien we tussen de haken de natuurlijke logaritme (ln) nemen en de termen van relatie 7.11 herschikken, dan krijgen we :

$$p = \text{kans}\ [\ Z > -\{\ln\ (S_t/E) + \mu \cdot T\}/\sigma \cdot \sqrt{T}] \qquad (7.12)$$

Z is normaal verdeeld met de verwachtingswaarde gelijk aan nul en de variantie gelijk aan 1. De normale verdeling is symmetrisch, zodat we voor 7.11 kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} p &= \text{kans}\ [Z < \{\ln(S_t/E) + \mu T\}/\sigma\sqrt{T}] \\ &= N\ [\{\ln(S_t/E) + \mu T\}/\sigma\sqrt{T}] \qquad (7.13) \end{aligned}$$

waarin N [.] de cumulatieve standaardnormale verdeling voorstelt.

In het geval van risico-neutraliteit kunnen we gebruikmaken van relatie 7.9 en de factor μ vervangen door $r-\sigma^2/2$. We krijgen dan de factor $N(d_2)$ uit de formule van Black & Scholes. Hieruit blijkt dat inderdaad geldt dat de factor $N(d_2)$ een kansgrootheid is: de kans dat de aandelenprijs boven de uitoefenprijs komt te liggen aan het einde van de looptijd. Wel moeten we beseffen dat we zijn uitgegaan van risico-neutraliteit.

We willen hier in het kort een aantal statistische grootheden van de lognormale verdeling geven, die in het verdere verloop nog aan de orde komen. Zoals reeds eerder is aangegeven in de relatie 7.7, is de verwachte waarde van S_T/S_t gelijk aan:

---

11. We vervangen Δt door T.

$\exp(\mu T + \sigma^2 T/2)$.

De variantie van het quotiënt van de aandelenprijs over een tijdsinterval ter grootte van T en de huidige prijs is:

$$\sigma^2(S_{t+T}/S_t) = \{\exp(2\mu T + \sigma^2 T\} \bullet \{\exp(\sigma^2 T) - 1\}. \qquad (7.14)$$

Verder is af te leiden dat de modus (mo) van de verdeling van de aandelenwijzigingen gelijk is aan:

$$mo = \exp(\mu T - \sigma^2 T) \qquad (7.15)$$

Tenslotte willen we hier een uitdrukking geven voor de mediaan (me) van de verdeling:

$$me = \exp(\mu T) \qquad (7.16)$$

Indien we bovenstaande grootheden willen bepalen voor de verdeling van de aandelenprijs op het tijdstip T in plaats van de rendementen, dan moeten we in bovenstaande vergelijkingen het gemiddelde, de modus en de mediaan vermenigvuldigen met S_t (de huidige aandelenprijs). Voor de variantie dienen we de uitdrukking van de variantie te vermenigvuldigen met het kwadraat van de huidige aandelenprijs $(S_t)^2$.

Als illustratie willen we de grootheden eens bepalen voor het reeds eerder gehanteerde voorbeeld. De huidige aandelenprijs bedraagt 50, de resterende looptijd 0,5 jaar, de risicovrije rentevoet 6% en de variantie 15%. Zoals reeds eerder is aangegeven, geldt in een risico-neutrale wereld, dat de verwachte mutatie in de aandelenprijs gelijk is aan de risicovrije rentevoet:

$$\mu T + \sigma^2 T/2 = r T.$$

Voor het voorbeeld wil dit zeggen dat μ de waarde -0,015 heeft. In onderstaand overzicht geven we de diverse waarden van zowel de verdeling van de rendementen als van de verdeling van de aandelenprijs aan het einde van het interval.

Tabel 7.1 Verwachte waarde, variantie,modus en mediaan van de verdeling van rendementen en aandelenkoers.

	S_T/S_t	S_T
verwachte waarde	1,0305	51,5227
variantie	0,0827	4,135
modus	0,9208	46,0406
mediaan	0,9925	49,6264

In het voorbeeld zien we dat de mediaan ligt tussen de modus en het gemiddelde van de verdeling. Dit is steeds het geval bij de lognormale verdeling. Alleen indien de variantie naar nul nadert zullen modus, mediaan en verwachte waarde naar dezelfde waarde naderen. We kunnen ook de verhouding vaststellen tussen de mediaan en de verwachte waarde. Deze verhouding is:

$$Me/E = \exp(-0{,}5\ \sigma^2 T) \tag{7.17}$$
$$\text{of } Me = E \bullet \exp(-0{,}5\ \sigma^2 T) \tag{7.18}$$

Eenzelfde verband kunnen we aangeven tussen modus en verwachte waarde:

$$Mo/E = \exp(-1{,}5\sigma^2 T) \tag{7.19}$$
$$\text{of } Mo = E \bullet \exp(-1{,}5\ \sigma^2 T) \tag{7.20}$$

Met behulp van bovenstaande vergelijkingen kunnen we de reeds eerder geconstateerde zaken beter begrijpen. Indien de rentevoet gelijk is aan de helft van de variantie, dan geldt dat μ de waarde nul heeft. Dan zal de mediaan van de verdeling van de mutaties gelijk zijn aan één en de mediaan van de verdeling van de aandelenprijs gelijk aan de huidige aandelenprijs. Er geldt, zoals reeds eerder vermeld, dat:

$$Me = S_t \cdot \exp(\mu\ T). \tag{7.21}$$

Is de rentevoet kleiner dan de helft van de variantie, dan is μ negatief en de mediaan van de rendementen-verdeling kleiner dan één. De mediaan van de verdeling van de aandelenkoers zal lager zijn dan de huidige aandelenkoers. Is de rentevoet hoger dan de helft van de variantie, oftewel hebben we een relatief lage onzekerheid, dan geldt het omgekeerde: de waarde van μ is groter dan nul, de mediaan van de rendementen is groter dan één en de mediaan van de aandelenkoers ligt rechts van de huidige koers.
Iets anders uitgedrukt kunnen we stellen dat bij een toename van de onzekerheid van de verdeling van de mutaties, de verwachte koers ongewijzigd blijft, maar de mediaan gaat verschuiven naar links. Bij een zeer kleine onzekerheid ligt de mediaan bijna tegen de verwachtingswaarde aan, maar hoe groter de onzekerheid, hoe groter het verschil wordt tussen verwachtingswaarde en mediaan. De mediaan nadert, indien de onzekerheid tot oneindig groot nadert, tot nul. De mediaan van de verdeling van de logaritmen uit de aandelenrendementen ligt dus tussen de waarde nul (bij zeer grote onzekerheid) en de verwachtingswaarde van de verdeling (bij onzekerheid gelijk aan nul).

7.4 De koppeling tussen CAPM en opties

7.4.1 Inleiding

In het CAPM kunnen we zoals reeds eerder is aangegeven, het geëiste rendement van een aandeel bepalen met behulp van de SML. Dit geëiste rendement is bij evenwicht (een van de veronderstellingen bij het CAPM) ook gelijk aan het verwachte rendement van een aandeel ($E(R_j)$). We kunnen dan binnen het CAPM schrijven:

$$E(S_T) = S_t \cdot (1+ E(R_j)) \tag{7.22}$$

Zoals reeds is vermeld is het CAPM in deze versie een model dat uitgaat van een discrete tijdsperiode. Voor ons doel hebben we meer behoefte aan een continu model, daar ook het optiewaarderingsmodel van Black & Scholes uitgaat van continue aandelenprijzen. Merton [1973] heeft een continue versie van het CAPM afgeleid. Bij dit model wordt ondermeer verondersteld, dat er continu handel plaats vindt in de loop van de tijd en dat de aandelenopbrengsten lognormaal verdeeld zijn. Indien de rentevoet in de loop van de tijd niet stochastisch is, geldt de volgende relatie:

$$E(R_j) = R_F + \beta_j \, [E(R_M) - R_F] \tag{7.23}$$

De grootheden zijn nu gedefinieerd als ogenblikkelijke waarden. Dit is de limiet van de waarde over een tijdsinterval gedeeld door het tijdsinterval, waarbij het tijdsinterval naar nul nadert. Vergelijking 7.23 is de continue versie van het CAPM. De voornaamste verschillen zijn enerzijds dat de opbrengsten over discrete tijdstippen vervangen worden door de ogenblikkelijke opbrengsten en daarnaast dat de verdeling van de opbrengsten niet normaal is maar lognormaal. Vooral dit laatste is voor ons van belang omdat het aansluit bij de benadering in de optie theorie. Daar veronderstellen we dat de logaritmen van de opbrengsten normaal verdeeld zijn en dan geldt dat de opbrengsten zelf lognormaal verdeeld zijn. Dit past goed bij de analyse uit paragraaf 7.3, waar we de lognormale verdeling hebben geanalyseerd.
We kunnen nu een koppeling aanbrengen tussen relatie 7.7 en 7.21. De factor α in 7.7 stelt de gemiddelde aandelenopbrengst voor per tijdseenheid. Ook de uitdrukking $E(R_j)$ geeft dit weer voor een aandeel binnen het CAPM, zodat geldt:

$$\alpha = E(R_j) \tag{7.24}$$

Van de relatie uit formule 7.10 maken we gebruik om het verband aan te geven tussen de uitkomsten van het CAPM en de optietheorie ter verklaring van de toekomstige verdeling van de aandelenkoersen.

7.4.2 Onzekerheid van opties en aandelen

Alvorens bovenstaande verder uit te werken willen we eerst aan een ander aspect van de koppeling van het CAPM en de optietheorie aandacht schenken. Af te leiden[12] valt dat er een samenhang bestaat tussen de bèta van een aandeel en de bèta van de calloptie op dat aandeel. Het volgende verband bestaat tussen de beide bèta's:

$$\beta_C = \beta_S \cdot \Omega \tag{7.25}$$

waarin: β_C = bèta van de call-optie
β_S = bèta van het aandeel
Ω = optie-elasticiteit

De optie-elasticiteit is gedefinieerd als de relatieve verandering in de optieprijs tengevolge van een relatieve verandering in de aandelenprijs oftewel in symbolen:

$$\Omega = (\delta C_t/\delta S_t)(S_t/C_t)$$

We willen een tweetal opmerkingen maken bij formule 7.25. Ten eerste geldt dat de elasticiteit van de optie een functie is van onder andere de aandelenkoers en de tijd. Dit heeft dan tot gevolg dat de waarde van de elasticiteit verandert als de aandelenkoers wijzigt en de tijd verstrijkt. De bèta van de optie zal dan ook een andere waarde aannemen. Bij een aandelenwijziging zal in het algemeen de bèta van het aandeel

12. Zie bijvoorbeeld Galai en Masulis [1976].

geen wijziging ondergaan, maar de bèta van de optie dus wel. Daarnaast geldt dat als de resterende looptijd van de optie verandert ook de waarde van de bèta een wijziging ondergaat. Een tweede opmerking geldt ten aanzien van de waarde van de elasticiteitscoëfficiënt. Deze waarde is binnen de veronderstellingen van het CAPM en de optietheorie groter dan één. Dit wil dan zeggen dat het systematische risico van een optie steeds groter is dan dat van een aandeel (behalve als de bèta negatief is). Dan zal ook de verwachte opbrengst van een optie groter zijn dan van het aandeel.

Zoals aangegeven zal de waarde van de optie-elasticiteit veranderen indien de resterende looptijd verandert. Nu is het onder bepaalde veronderstellingen[13] mogelijk een aandeel te beschouwen als een optie op de onderneming. Als we nu veronderstellen dat de bèta van de onderneming constant is, dan zal de bèta van een optie op de onderneming niet constant zijn bij het verstrijken van de tijd, omdat de optie-elasticiteit ieder moment verandert. Maar de optie was het aandeel, dus de bèta van een aandeel zal niet constant zijn. Dit is wellicht één van de verklaringen voor het niet stationair zijn van de bèta's in hoofdstuk 4.

We kunnen met behulp van de optie-elasticiteit ook het verband aangeven tussen de variantie van de aandelenopbrengst en de optie-opbrengst. Er geldt namelijk:

$$\mathrm{Var}[C/C_t] = \Omega^2\ \mathrm{Var}[S/S_t] \qquad (7.26)$$

oftewel de standaarddeviatie van de optie-opbrengsten is gelijk aan het produkt van de standaarddeviatie van de aandelenopbrengst en de optie-elasticiteit. Blijkbaar is de standaarddeviatie van een optie groter is dan die van het aandeel. Bovendien wijzigt de waarde van de elasticiteitscoëfficiënt steeds bij het verstrijken van de tijd.

---

13. Zie bijvoorbeeld Merton [1974].

7.4.3 De factor $N(d_3)$

In het voorafgaande hoofdstuk is steeds stilzwijgend verondersteld dat er sprake was van risico-neutraliteit. We willen nu deze veronderstelling vervangen door de meer realistische veronderstelling van risico-afkeer. Het gevolg van deze veronderstelling is ondermeer dat de beleggers een vergoeding eisen voor het lopen van risico. Risico wordt namelijk negatief gewaardeerd en dient gecompenseerd te worden. Uitgaande van het CAPM, wordt alleen een compensatie geëist voor het systematische deel van het risico. Het niet-systematische deel behoeft men niet te lopen en wordt derhalve ook niet door de markt gecompenseerd. Immers door portefeuillevorming en diversificatie kan men dit deel wegwerken. Binnen het CAPM geldt derhalve dat alleen een verandering in het systematische risico zal leiden tot een mutatie in het verwachte rendement. Een wijziging van het niet-systematische risico heeft daarop geen invloed. Indien het systematische risico toeneemt, zal dit leiden tot een ogenblikkelijke koersverlaging van het aandeel. De verwachte aandelenprijs ondergaat daarentegen geen verandering. Dientengevolge moet in een wereld met risico-afkeer de verwachte opbrengst stijgen. Het gevolg van de risicocompensatie is, dat de factor α, die de gemiddelde (geometrische) aandelenopbrengst per tijdseenheid aangeeft, een hogere waarde krijgt. (Dit geldt indien de bèta groter is dan nul). Het gevolg hiervan is dat de verwachte aandelenprijs ten opzichte van de huidige prijs een hogere waarde heeft. De factor α in formule 7.7 is hoger. Indien de variantie niet wijzigt, zal ook de factor μ stijgen. Er geldt dat:

$$\alpha = \mu + \sigma^2/2$$

Dit wil zeggen dat de verwachte logaritmische aandelenopbrengst per tijdsperiode stijgt. Er treedt een wijziging op van de verwachte koers, maar er treedt ook een wijziging op in de verdeling van de mogelijke koersen.

We moeten nu nog aandacht schenken aan de gevolgen van de wijziging in de risicohouding voor de kans dat de optie in-the-monndigt. Enerzijds neemt deze kans toe, want de verwachte koers wordt hoger. Dit heeft dan tot gevolg dat de mediaan van de verdeling naar rechts verschuift. Anderzijds speelt de wijziging in de verdeling een rol. Deze wijziging houdt in dat de kansmassa anders wordt verdeeld.
Ook hier kunnen we gebruikmaken van de analyse omtrent de kans dat de aandelenprijs boven de uitoefenprijs komt te liggen. Uit formule 7.13 blijkt dat deze kans te schrijven is als:

$$p = N\ [\{\ln(S_t/E) + \mu T\}/\sigma\sqrt{T}]$$

Omdat er nu geen sprake meer is van risico-neutraliteit, maar van risico-mijdend gedrag, kunnen we hier niet de factor μ vervangen door $r-\sigma^2/2$.
In dit geval moeten we dan uitgaan van $\alpha = \mu+\sigma^2/2$ waarbij de waarde van α bepaald wordt inclusief een risico-opslag. Relatie 7.22 geeft het verband aan tussen α en de uit het CAPM bepaalde waarde voor het geëiste rendement. Dit verband kunnen we gebruiken om in te vullen in relatie 7.13. We krijgen dan:

$$p = N\ [\{\ln(S_t/E) + T[E(R_j) - \sigma^2/2]\}/\sigma\sqrt{T}] \qquad (7.27)$$

We zien dat we ook hier met een kansgrootheid te maken hebben. Dit is namelijk de kans dat de aandelenkoers komt te liggen boven de uitoefenprijs. Dit geldt in een situatie van risico-mijdend gedrag.

We willen hier op een aantal aspecten wijzen. Allereerst zien we dat de waarde van het argument van de cumulatieve standaard normale kansverdeling in een situatie van risico-mijdend gedrag een hogere waarde heeft dan bij risico-neutraal gedrag (dit geldt bij een positieve bèta). Dit houdt dan weer in dat de waarde van N[.] een hogere uitkomst heeft. Dat wil

zeggen dat de kans dat de aandelenkoers boven de uitoefenprijs komt te liggen aan het einde van de looptijd groter is. Een tweede opmerking betreft het feit dat in relatie 7.27 een term is opgenomen die een vergoeding bevat voor het systematische risico. Hoe hoger dit risico, hoe hoger de waarde van de bèta en hoe hoger de waarde van het verwachte en geëiste rendement. Dit leidt dan weer tot een hogere waarde van de kans. Bij afwezigheid van systematisch risico, dat wil zeggen bij een waarde voor β van nul, komt de oorspronkelijke risico-neutrale situatie weer terug. Bij een situatie van negatieve bèta's, krijgen we kansen die kleiner zijn.
Een derde opmerking betreft het feit dat in de kansgrootheid zowel de variantie als de bèta een rol spelen. De rol van beide is echter niet geheel gelijk. De bètacoëfficiënt beinvloedt de verwachte waarde van de aandelenprijs op het einde van de looptijd. Deze verwachte waarde wordt echter niet beïnvloed door de variantie van de logaritme van de opbrengsten. De variantie heeft invloed op de verdeling van de kansmassa. Dit komt onder andere tot uiting in de ligging van de mediaan.
Vervolgens geldt dat de bèta steeds een positieve invloed heeft op de hoogte van de uitoefenkans, terwijl de variantie in een aantal gevallen een negatieve invloed heeft. Dit laatste is het geval voor at-the money en in-the-money opties. Ook bij risico-neutraliteit is dit het geval. Bij out-of-the-money opties geldt dat, als de optie voldoende out-of-the-money is, een vergroting van de variantie tot een hogere kans leidt. Bij risico-mijdend gedrag moet gelden dat de optie meer out-of-the-money moet zijn wil een vergroting van de waarde van de variantie leiden tot een verhoging van de kans.
Tenslotte willen we hier herhalen dat de bèta geen rol speelt bij de prijsbepaling van een optie. Bij de prijsbepaling wordt uitgegaan van de mogelijkheid een risicovrije (hedge) portefeuille samen te stelen (zie paragraaf 7.2). Dan speelt alleen de risicovrije rentevoet een rol. De bèta speelt wel een rol bij de bepaling van de verwachte koers en bij de

bepaling van de kans dat de optie in-the-money eindigt. De factor $N(d_2)$ geeft deze kans weer in een risico-neutrale wereld. In een wereld met risico-afkeer wordt deze kans bepaald met behulp van relatie 7.27. Hierin speelt de bèta een rol. De factor in deze formule zullen we aanduiden met $N(d_3)$, waarbij:

$$d_3 = \frac{\ln S/E + (R_j - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (7.28)$$

De factor $N(d_3)$ is de kans dat de aandelenprijs aan het einde van de looptijd, boven de uitoefenprijs uitkomt in een wereld waarin risico-afkerig gedrag wordt verondersteld oftewel de kans dat de optie in-the-money eindigt.

7.5 Wijziging van de parameters

7.5.1 Inleiding

Relatie 7.27 is een uitdrukking voor de kans dat de aandelenprijs op het einde van de looptijd van de optie boven de uitoefenprijs eindigt. In deze paragraaf willen we analoog aan hoofdstuk 6 nagaan wat de invloed is van wijzigingen in de waarde van de parameters. Achtereenvolgens wordt een wijziging beschouwd in de aandelenprijs, de uitoefenprijs, de rentevoet, de resterende looptijd, de onzekerheid en tenslotte een wijziging in het systematische risico.

7.5.2 Wijziging van de aandelenprijs

De analyse wordt hier weer uitgevoerd aan de hand van de afgeleide van de kans dat de aandelenprijs boven de uitoefenprijs uitkomt ($N(d_3)$), naar de desbetreffende parameter. Dit is hier de aandelenprijs. Deze afgeleide luidt:

$$\delta N(d_3)/\delta S = Z(d_3) \bullet 1/(S\bullet\sigma\sqrt{T}) \tag{7.29}$$

Het teken van deze afgeleide is steeds positief. Dit is vergelijkbaar met de situatie in de risico-neutrale wereld. De waarde van de afgeleide is echter wel hoger. Bij risicomijdend gedrag geldt dat de kans gevoeliger is voor wijzigingen in de aandelenprijs.

7.5.3 Wijziging van de uitoefenprijs

De afgeleide van de kans naar de uitoefenprijs luidt:

$$\delta N(d_3)/\delta E = - Z(d_3) \bullet 1/(E\bullet\sigma\sqrt{T}). \tag{7.30}$$

Ook hier zien we weer hetzelfde negatieve teken als in hoofdstuk 6. Tevens zien we hier dat de absolute waarde van de afgeleide hoger is. Dit heeft dan tot gevolg dat ook hier de kans gevoeliger is voor wijzigingen in de uitoefenprijs.

7.5.4 Wijziging van de risicovrije rentevoet

In de formule van de kansgrootheid komt de rentevoet niet expliciet voor. De risicovrije rentevoet is namelijk vervangen door een grootheid die op de risicovrije rentevoet een opslag voor het systematische risico bevat. Dit heeft dan tot gevolg, dat een wijziging in de risicovrije interestvoet indirect ook invloed kan hebben op het geëiste rendement. In het algemeen geldt, dat een stijging van de rente een verhoging van het geëiste rendement tot gevolg heeft.

7.5.5 Wijziging in de resterende looptijd

Deze afgeleide is van belang omdat de resterende looptijd steeds korter wordt tijdens het bestaan van een optie. De waarde van de afgeleide van de kans naar de resterende looptijd luidt:

$$\delta N(d_3)/\delta T = -1/(2T) \bullet Z(d_3)[\{\ln(S_t/E) - T(E(R_j) - \sigma^2/2)\}/\sigma\sqrt{T}] \tag{7.31}$$

Bij deze afgeleide is het niet zonder meer te zeggen wat het teken zal zijn. Van belang hiervoor is het deel tussen de accolades. Als geldt:

$$S_t/E > \exp[T\{E(R_j)-\sigma^2/2\}]$$

dan is de afgeleide negatief en zal een verkorting van de resterende looptijd leiden tot een vergroting van de kans van uitoefening. In het omgekeerde geval is de afgeleide positief en zal de kans dalen indien de resterende looptijd korter wordt. Hier is eenzelfde verband aanwezig als in hoofdstuk 6. Wel geldt echter dat het omslagpunt op een hogere waarde komt te liggen omdat $E(R_j)$ groter is dan de risicovrije rentevoet (behalve bij een negatieve waarde van de bètacoëfficiënt).

In het vorige hoofdstuk - bij risico-neutraliteit - is aangetoond dat, wanneer de variantie gelijk is aan twee maal de rentevoet, de kans dat de aandelenprijs aan het einde van de looptijd van de optie boven de huidige prijs komt te liggen, gelijk was aan 50%. Deze relatie gold bij iedere looptijd van de optie. Dit verband gaat nu niet langer meer op. Nu zien we dat de kans dat de aandelenprijs hoger komt te liggen dan de uitoefenprijs gelijk is aan 50%, indien de volgende relatie geldt:

$$\ln(S_t/E) = T \bullet [E(R_j)-\sigma^2/2] \tag{7.32}$$

Wil bovenstaande gelijkheid gelden onafhankelijk van de looptijd, dan moet $E(R_j)$ gelijk zijn aan $\sigma^2/2$. Indien σ^2 gelijk is aan twee maal de risicovrije rentevoet, dan zal, uitgaande van een positieve bèta, het rechter lid steeds positief zijn. Dit impliceert dat de verhouding tussen de aandelenprijs nu en de aandelenprijs aan het einde van de looptijd groter is dan 1 en dat houdt in dat de aandelenprijs met een grotere kans dan 50% boven de huidige waarde komt te liggen. De 50% wordt reeds behaald bij een prijs die onder de huidige aandelenprijs ligt.

7.5.6 Wijziging van de onzekerheid

In deze subparagraaf zullen we de invloed van een wijziging in de onzekerheid nagaan op de kans dat de optie minstens at-the-money eindigt. De afgeleide van de kans naar de standaarddeviatie luidt:

$$\delta N(d_3)/\delta\sigma = -\ Z(d_3) \bullet [d_1/\sigma + \{\sqrt{T} \bullet E(R_j)\}/\sigma^2] \qquad (7.33)$$

Het teken van de afgeleide hangt af van de uitkomst van het deel dat tussen de rechte haken staat. Bij risico-neutraliteit staat daar, zoals is afgeleid in het vorige hoofdstuk, alleen het eerste deel. Het teken van de afgeleide was afhankelijk van het tekenverloop van de factor d_1. Bij risico-mijdend gedrag echter ontstaat het omslagpunt in het teken bij:

$$d_1 = \{\sqrt{T} \bullet E(R_j)\}/\sigma \qquad (7.34)$$

Het rechter lid van deze vergelijking is steeds positief, zodat het omslagpunt ligt bij een hogere waarde van d_1 dan bij risico-neutraliteit. Voor at-the-money en in-the-money opties geldt dat de afgeleide steeds negatief is. In die situaties geldt dan dat een vergroting van de onzekerheid tot een daling van de kans leidt, dat de optie in-the-money eindigt. Indien de optie voldoende out-of-the-money is, is het teken van de afgeleide positief. Dan leidt een verhoging van de onzekerheid tot een verhoging van de kans.

7.5.7 Wijziging van het geëiste rendement

Van belang is na te gaan wat de invloed is van een wijziging in het geëiste rendement van de belegger. Het geëiste rendement is in een situatie van evenwicht ook gelijk aan het verwachte rendement. Het gaat dan om de afgeleide van de factor $N(d_3)$ naar R_j. Deze afgeleide is gelijk aan:

$$\delta N(d_3)/\delta Rj) \; Z(d_3) \bullet \sqrt{T}/\sigma. \qquad (7.35)$$

De uitkomst is steeds positief. Een verhoging van het geëiste rendement leidt tot een verhoging van de kans. Anders geformuleerd: de bèta en de kans zijn positief gecorreleerd. Van belang is hier op te merken dat de β van het aandeel en de prijs van de optie echter niet gecorreleerd zijn.

7.6 De verdeling van de aandelenprijzen bij risico-mijdend gedrag

In hoofdstuk 6 hebben we - in een wereld met risico-neutraal gedrag - de verdeling bepaald van de aandelenkoersen aan het einde van de looptijd van de optie. Met behulp van de eigenschappen van de lognormale kansverdeling bleek het mogelijk om de waarde van het gemiddelde, de modus en de mediaan te bepalen. In die wereld geldt de gelijkheid tussen het geometrisch gemiddelde van de aandelenopbrengsten per tijdseenheid en de risicovrije rentevoet per tijdseenheid.

In de situatie van risico-afkerig gedrag, is die gelijkheid niet langer geldig. In de gemiddelde aandelenopbrengst (α_a) dient, zoals in het voorafgaande reeds is aan gegeven, een vergoeding te zitten voor het risico. De gemiddelde opbrengst zal daardoor hoger zijn dan de risicovrije rentevoet. Met behulp van de Security Market Line (SML) uit het CAPM kunnen we voor een aandeel de hoogte van het verwachte rendement bepalen. Hierbij speelt de β een belangrijke rol. In deze situatie geldt:

$$\alpha_a = E(R_j) = \mu + \sigma^2/2 \qquad (7.36)$$

waarin α_a = verwachte (geometrische) rendement van een aandeel

Hiervan kunnen we gebruik maken om de grootheden van de verdeling van de aandelenkoers te bepalen. In onderstaande tabel worden de grootheden weergegeven, zowel voor risico-neutraliteit als voor risico-afkeer.

Tabel 7.2 De grootheden van de kansverdeling van de aandelenkoers voor risico-neutraliteit en voor risico-afkeer.

	Risico-neutraal	risico-afkeer
Gemiddelde	$\exp(\alpha_n)$	$\exp(\alpha_a)$
Modus	$\exp(\mu_n - \sigma^2/2)$	$\exp(\mu_a - \sigma^2/2)$
Mediaan	$\exp(\mu_n)$	$\exp(\mu_a)$
Variantie	$\{\exp(2\mu_n + \sigma^2)\} \bullet \{\exp(\sigma^2)-1\}$	
		$\{\exp(2\mu_a + \sigma^2/2)\} \bullet \{\exp(\sigma^2)-1\}$

In bovenstaande tabel is uitgegaan van eenzelfde waarde voor de variantie van de logaritmen uit de aandelenopbrengsten per tijdseenheid. Tevens is verondersteld, dat er sprake is van een tijdsinterval ter grootte van één tijdseenheid.
De factor μ_a is gelijk aan $E(R_j)-\sigma^2/2$. Bij risico-neutraliteit gold: $\mu_n = r_f-\sigma^2/2$.

Met behulp van tabel 7.2 kunnen we voor ieder aandeel de verdeling van de koersen op ieder willekeurig tijdstip in de toekomst bepalen. Wel moet worden verondersteld dat de varianties van de logaritmen uit de aandelenopbrengsten[14] en de rentevoet constant blijven gedurende de beschouwde periode.

We willen dit nog eens laten zien aan de hand van een voorbeeld. We nemen weer een aandeel met een koers van 50. Verder hebben we gegevens nodig om binnen het CAPM te werken. We veronderstellen dat de β van het aandeel gelijk is aan één.

14. Zie Kemna [1987] voor een verdere analyse van dit probleem.

Het rendement op de marktportefeuille is 12%. We willen nu de verwachte verdeling van dit aandeel vaststellen over 0,5 jaar. De waarde van de variantie hebben we vastgesteld aan de hand van het gewogen gemiddelde van alle impliciete varianties, die behoren bij de optie op dit aandeel. Deze waarde is bijvoorbeeld gelijk aan 15%. Uit de waarde voor de bèta van 1 en de risicovrije rentevoet van 6% en een marktrendement van 12% op continue jaarbasis volgt dat het verwachte rendement gelijk is aan 12%. We kunnen nu een aantal grootheden van de verdeling van de aandelenprijs over 0,5 jaar vaststellen. Eerst bepalen we de waarde voor α_a, μ_a en $E(R_j)$. Deze zijn achtereenvolgens 0,12; 0,045 en 0,12. De verwachte waarde van de aandelenkoers bedraagt:

$$E(S_{t+0,5jaar}) = 50 \exp(0,12 \bullet 0.5) = 53,09$$

De mediaan van de verdeling heeft de waarde:

$$50 \bullet \exp(\mu \, \Delta t) = 50 \bullet \exp(0,045 \bullet 0,5) = 51,14$$

De modus wordt:

$$50 \bullet \exp\{(\mu-\sigma^2)\Delta t\}= 50 \bullet \exp\{(0,045-0,15) \bullet 0,5\} = 45,02$$

Tenslotte bepalen we de variantie van de aandelenprijs over 0,5 jaar:

$$50 \bullet \exp\{(2\mu +\sigma^2)\bullet\Delta t\}\bullet\{\exp (\sigma^2 \, \Delta t) - 1\} =$$
$$50 \bullet \exp\{(2 \bullet 0,045 + 0,15) \bullet 0,5\} \{\exp(0,15 \bullet 0,5) - 1\} =$$
$$= 4,39.$$

Met behulp van deze uitkomsten hebben we een goed inzicht in de verdeling. Indien we de gehele verdeling willen hebben, kunnen we die ook bepalen met de reeds eerder gedefinieerde factor $N(d_3)$. We kunnen dan voor iedere waarde de kans vaststellen dat de aandelenprijs komt te liggen boven die waarde. Het verschil tussen twee kansen geeft dan de kansdichtheid weer bij die waarde. Zo verkrijgen we de gehele kansdichtheidsfunctie van de aandelenkoers over 0,5 jaar.

7.7 De veronderstellingen van het CAPM

In deze paragraaf willen we de veronderstellingen, die ten grondslag liggen aan het CAPM, weergeven. Jarrow [1988] en Copeland en Weston [1988] geven een goed overzicht van deze veronderstellingen. Samengevat:

1. De beleggers zijn risico-mijders en streven naar maximalisatie van het verwachte nut van de einde-periode welvaart.
2. De beleggers hebben homogene verwachtingen omtrent de opbrengsten van een beleggingsobject.
3. Er bestaat een risicovrije belegging, zodanig dat beleggers onbeperkt bedragen kunnen inlenen en uitlenen tegen die risicovrije rentevoet.
4. De hoeveelheid beleggingen is vast, de beleggingen zijn volledig deelbaar en er is een markt voor de beleggingen.
5. De vermogensmarkt is perfect[15].

Bij deze veronderstellingen zijn enkele kanttekeningen te plaatsen.

ad 1. Omdat de beleggers hun einde-periode welvaart maximaliseren, is er impliciet sprake van een éénperiode model[16].

ad 2. De veronderstelling van homogene verwachtingen is een stingente veronderstelling. De beleggers hebben allen voor een belegging dezelfde verwachtingen ten aanzien

---

15. Zie voor een uitgebreide uitwerking: Tempelaar [1987]

16. Zoals aangegeven heeft Merton [1973] een continue versie voor dit model ontwikkeld, die bruikbaar is binnen het optiemodel van Black & Scholes.

van de opbrengst, de variantie en de covariantie met andere beleggingsmogelijkheden.

ad 3. Er bestaat een risicovrije belegging, of zoals Tempelaar [1987] het formuleert: "dat er beleggingen voorhanden zijn, waarvan de uitkering vaststaat onafhankelijk van de toekomstige toestand".

7.8 CAPM en de kans dat de aandelenprijs boven een bepaalde waarde komt te liggen ($N(d_3)$)

In deze paragraaf zullen we de kans dat de aandelenprijs boven een bepaalde waarde (de uitoefenprijs) komt te liggen, in een wereld met risico-mijdend gedrag verder analyseren aan de hand van een voorbeeld. We kunnen dan de resultaten uit paragraaf 7.5 nader toelichten. In dit voorbeeld hanteren we dezelfde waarden voor de diverse grootheden als in het voorbeeld aan het einde van hoofdstuk 6, maar als extra gegeven komen hierbij de verschillende waarden voor de bèta van het aandeel. We nemen als waarden voor de bèta respectievelijk 0; 0,5; 1,0 en 2,0.

In tabel 7.3 wordt eerst nagegaan wat de invloed is op de kans, dat de aandelenkoers boven de huidige prijs komt te liggen aan het einde van de looptijd.

Tabel 7.3 De kans dat de aandelenprijs boven de huidige prijs komt te liggen.

looptijd	variantie			
in dagen	0,05	0,12	0,15	0,25
		bèta = 0,0		
91	0,5311	0,5000	0,4922	0,4740
182	0,5440	0,5000	0,4890	0,4633
273	0,5539	0,5000	0,4866	0,4551
364	0,5621	0,5000	0,4845	0,4482
		bèta = 0,5		
91	0,5577	0,5172	0,5077	0,4860
182	0,5814	0,5244	0,5109	0,4802
273	0,5993	0,5298	0,5133	0,4758
364	0,6143	0,5345	0,5154	0,4720
		bèta = 1,0		
91	0,5841	0,5345	0,5231	0,4980
182	0,6180	0,5487	0,5327	0,4971
273	0,6435	0,5596	0,5400	0,4965
364	0,6645	0,5687	0,5462	0,4960
		bèta = 2,0		
91	0,6355	0,5687	0,5539	0,5219
182	0,6879	0,5967	0,5760	0,5309
273	0,7258	0,6179	0,5928	0,5379
364	0,7559	0,6354	0,6068	0,5437

Uit tabel 7.3 valt op te maken dat als de bèta gelijk is aan nul we de situatie terug krijgen, die we ook in hoofdstuk 6 beschreven hebben. Bij een relatief lage variantie (0.05) stijgt de kans bij verlenging van de looptijd, bij een variantie gelijk aan twee maal de rentevoet blijft de kans steeds gelijk, terwijl bij een variantie die groter is dan twee maal de rentevoet de kans daalt indien de looptijd langer wordt. Bij een gegeven looptijd leidt een toename van de onzekerheid tot een daling van de kans.

Als de waarde van de bèta 0,5 bedraagt, zien we dat bij lagere waarden voor de variantie (0,05; 0,12 en 0,15), een verlenging van de looptijd steeds leidt tot een stijging van de kans dat de aandelenprijs aan het einde van de looptijd boven de huidige prijs komt te liggen. Echter bij een hoge waarde voor de variantie (0,25) zien we dat de kans eerst daalt, indien we van 91 naar 192 dagen gaan. Bij een verdere verlenging van de looptijd daalt de kans niet verder, maar gaat deze stijgen. Ook hier geldt dat bij eenzelfde looptijd een verhoging van de onzekerheid steeds leidt tot een lagere kans dat de aandelenprijs boven de huidige prijs komt te liggen.

Bij een waarde voor het verwachte rendement van 12% (bèta =1) zien we, dat voor een waarde van de onzekerheid ter grootte van 0,05; 0,12 en 0,15 ook hier weer dat de kans toeneemt bij een verlenging van de looptijd. Bij een onzekerheid van 0,25 echter daalt de kans bij een verlenging van de onzekerheid.

Bij de situatie van een bèta van twee geldt steeds dat een verlenging van de looptijd tot een stijging van de kans leidt dat de aandelenprijs op het einde van de looptijd boven het huidige niveau zal liggen.

Een verhoging van de waarde van de bèta leidt bij dezelfde looptijd steeds tot een verhoging van de kans, terwijl een verhoging van de variantie tot een lagere kans leidt.

De kans is kleiner dan 50% bij een lage waarde van de bèta en een hoge waarde voor de variantie. In de andere gevallen geldt dat de kans groter dan 50% is dat de aandelenkoers aan het einde van de periode hoger zal zijn dan de huidige prijs.

Schenken we nu aandacht aan de kans dat de aandelenprijs aan het einde van de looptijd hoger zal zijn dan een waarde die onder de huidige prijs ligt. In optie termen gaat het om de kans dat in the-money opties ook in-the money eindigen. In tabel 7.5 wordt dit voor een tweetal waarden uitgewerkt. Dit zijn respectievelijk 41,67 (bij een groei van 20% per jaar stijgt dan de aandelenprijs tot 50) en 49.

Tabel 7.5 De kans dat de aandelenprijs boven een waarde lager dan de huidige prijs blijft.

	uitoefenprijs = 41,67			uitoefenprijs = 49		
			variantie			
	0,05	0,15	0,25	0,05	0,15	0,25
looptijd in dagen			bèta = 0			
91	0,9562	0,8216	0,7466	0,6021	0,5338	0,5063
182	0,8967	0,7382	0,6640	0,5942	0,5184	0,4861
273	0,8591	0,6949	0,6210	0,5947	0,5106	0,4737
364	0,8343	0,6670	0,5926	0,5974	0,5053	0,4643
			bèta = 0,5			
91	0,9620	0,8315	0,7561	0,6278	0,5492	0,5182
182	0,9127	0,7557	0,6793	0,6305	0,5402	0,5030
273	0,8835	0,7179	0,6406	0,6391	0,5373	0,4944
364	0,8655	0,6947	0,6158	0,6484	0,5362	0,4881
			bèta = 1,0			
91	0,9672	0,8411	0,7654	0,6528	0,5645	0,5302
182	0,9268	0,7726	0,6944	0,6657	0,5619	0,5199
273	0,9047	0,7402	0,6599	0,6816	0,5638	0,5151
364	0,8924	0,7213	0,6385	0,6967	0,5668	0,5121
			bèta = 2,0			
91	0,9759	0,8591	0,7834	0,7010	0,5947	0,5540
182	0,9497	0,8043	0,7234	0,7316	0,6046	0,5536
273	0,9383	0,7817	0,6971	0,7594	0,6160	0,5564
364	0,9342	0,7708	0,6824	0,7833	0,6267	0,5597

In tabel 7.5 geeft het linker gedeelte de kans weer dat de aandelenprijs boven 41,67 ligt op het einde van de looptijd. Deze kans is het grootst indien de resterende looptijd klein is. Anders geformuleerd: een verlenging van de looptijd leidt tot een verlaging van de kans. Dit geldt in het voorbeeld voor alle gehanteerde waarden van de variantie en alle waarden voor de bètacoëfficiënt. Ook hier geldt weer dat de situatie met een bèta gelijk aan nul hetzelfde is als in hoofdstuk zes. Tevens blijkt dat een verhoging van de variantie bij ieder looptijd steeds leidt tot een verlaging van de kans.

Het rechter gedeelte van de tabel gaat uit van een minimum waarde van de aandelenprijs van 49. In optietermen is dit een optie die net in-the-money is. Indien de bèta gelijk aan nul is, zien we dat ook hier de kans daalt als de looptijd groter wordt. Bij een waarde voor de bèta van 0,5 zien we twee tegengestelde veranderingen van de kans. Bij een waarde van de variantie van 0,05 stijgt de kans bij verlenging van de looptijd, terwijl bij een variantie van 0,15 en 0,25 de kans daalt. Indien de waarde van de bèta toeneemt tot 1 zien we bij een variantie van 0.05 en 0,15 dat de kans stijgt, indien de looptijd langer wordt. Alleen bij een variantie van 0,25 daalt de kans. Bij een waarde voor de bèta van twee zien we bij alle waarden van de variantie dat de kans stijgt bij een verlenging van de looptijd.
In alle gevallen, zowel bij de prijs van 41,67 als de prijs van 49 geldt dat bij eenzelfde looptijd een verhoging van de variantie tot een verlaging van de kans leidt.

In tabel 7.6 willen de situatie analyseren voor out-of-the-money optie. Wat is de kans dat zo'n optie in-the-money eindigt? We nemen een uitoefenprijs gelijk aan 51 (als tegenhanger voor 49 in het vorige voorbeeld) en 60 (20% hoger dan 50).

Tabel 7.6 De kans dat de aandelenprijs boven een waarde hoger dan de huidige prijs blijft.

	uitoefenprijs = 51			uitoefenprijs = 60		
	variantie			variantie		
	0,05	0,15	0,25	0,05	0,15	0,25
looptijd in dagen			bèta = 0			
91	0,4606	0,4515	0,4426	0,0602	0,1683	0,2135
182	0,4941	0,4602	0,4411	0,1486	0,2441	0,2717
273	0,5132	0,4631	0,4371	0,2101	0,2819	0,2967
364	0,5270	0,4641	0,4326	0,2549	0,3052	0,3104
			bèta = 0,5			
91	0,4873	0,4669	0,4545	0,0687	0,1782	0,2223
182	0,5320	0,4820	0,4579	0,1716	0,2616	0,2859
273	0,5594	0,4898	0,4576	0,2451	0,3050	0,3150
364	0,5800	0,4950	0,4563	0,2999	0,3328	0,3319
			bèta = 1,0			
91	0,5140	0,4823	0,4664	0,0780	0,1885	0,2313
182	0,5695	0,5039	0,4748	0,1969	0,2797	0,3005
273	0,6047	0,5165	0,4783	0,2831	0,3288	0,3337
364	0,6316	0,5259	0,4802	0,3480	0,3614	0,3539
			bèta = 2,0			
91	0,5672	0,5132	0,4903	0,0995	0,2101	0,2500
182	0,6424	0,5475	0,5086	0,2536	0,3177	0,3307
273	0,6907	0,5697	0,5197	0,3664	0,3787	0,3722
364	0,7272	0,5870	0,5280	0,4513	0,4208	0,3994

In tabel 7.6 vraagt eerst het linker gedeelte van de tabel de nadere aandacht. Dit geeft de kans weer dat de aandelenprijs na verloop van respectievelijk 91; 182; 273 of 364 dagen

boven de waarde 51 zal liggen, terwijl de huidige prijs gelijk is aan 50.
Bij een waarde voor de bèta van 0 (het bovenste blok) wordt dezelfde situatie gegeven als in de risico-neutrale wereld uit hoofdstuk 6. We zien dat bij lage waarden van de variantie (0,05 en 0,015) een verlenging van de looptijd tot een verhoging van de kans leidt. Bij een variantie van 0,25 geldt echter dat een verlenging van de looptijd een verlaging van de kans geeft. Bij een bèta van 0,5 geldt weer bij lage waarden van de variantie dat een verlenging van de looptijd leidt tot een hogere kans. Bij een variantie van 0,25 zien we dat, indien de looptijd langer wordt, de waarde van de kans eerst stijgt, maar bij verdere looptijdverlenging weer gaat dalen. Voor hogere waarden van de bèta geldt steeds dat een verlenging van de looptijd in een stijging van de kans resulteert.

Indien we naar de invloed van wijzigingen in de variantie kijken, dan zien we in het gehele linker blok dat een verhoging van de variantie steeds leidt tot een verlaging van de kans. Dit is in tegenstelling met de waarden in het rechter blok. Deze geven de kans aan dat de aandelenprijs na verloop van een aantal dagen boven de waarde 60 zal komen te liggen. We zien daar dat een verhoging van de variantie in alle gevallen leidt tot een verhoging van de kans. In optietermen geldt dat indien de optie sterk out-of-the-money is, een verhoging van de variantie leidt tot een verhoging van de kans dat de optie aan het einde van de looptijd in-the-money eindigt.
De invloed van verlenging van de looptijd is voor alle gevallen hetzelfde, namelijk: een verlenging leidt tot een hogere kans. We zien wel dat de kans niet zo hoog is als in het linker blok.

Indien we alle vijf de situaties (ver in-the-money, iets in-the-money, at-the-money, iets out-of-the-money en ver out-of-the-money) tesamen nemen, ontstaat het volgende beeld:

- Bij ver in-the-money leidt een verlenging van de looptijd tot een verlaging van de kans. Dit geldt voor alle drie de niveaus van de variantie en de vier niveaus van bètawaarden.
- Bij iets in-the-money krijgen we bij lagere waarden voor de bèta en hogere waarden van de variantie ook dat een verlenging van de looptijd tot een verlaging van de kans leidt. Echter bij hogere waarden voor de bèta en lagere waarde voor de variantie leidt een verlenging tot een stijging van de kans.
- Eenzelfde beeld zien we bij at-the-money, zij het dat lagere waarden van bèta en variantie al tot een stijging van de kans bij verlenging van de looptijd leiden.
- Bij iets out-of-the-money zien we bijna steeds een stijging van de kans met uitzondering van de situatie van risicovrij en variantie hoog.
- Bij ver out-of-the-money zien we steeds dat een verlenging van de looptijd leidt tot een stijging van de kans.
- Alleen in de situatie van ver out-of-the-money leidt een verhoging van de variantie bij eenzelfde looptijd tot een stijging van de kans. In alle andere gevallen leidt een verhoging van de variantie bij eenzelfde looptijd tot een verlaging van de kans.
- Een verhoging van het systematische risico (de bèta) leidt in alle gevallen tot een verhoging van de kans.

HOOFDSTUK 8 SAMENVATTING EN CONCLUSIES

8.1 Samenvatting

De probleemstelling, waaraan in deze studie aandacht is geschonken, luidt:

Is het mogelijk de verdeling van de aandelenprijzen op ieder willekeurig tijdstip in de toekomst weer te geven?

Dit blijkt het geval te zijn, indien aan een aantal veronderstellingen is voldaan. De voornaamste veronderstelling houdt in dat de logaritmen van de aandelenopbrengsten normaal verdeeld zijn. Onder die omstandigheden zullen de aandelenkoersen zelf lognormaal verdeeld zijn. Voor de vaststelling van de lognormale verdeling van de aandelenkoersen zijn twee parameters nodig, namelijk de verwachtingswaarde en de variantie. In de hoofdstukken 2, 3 en 4 is het accent vooral gelegd op de eerste parameter, terwijl de tweede vooral in de hoofdstukken 5 en 6 aan de orde is gekomen.

In hoofdstuk 2 is aandacht geschonken aan de vraag hoe de feitelijke verdeling van de aandelenkoersen er op de Amsterdamse aandelenmarkt uitziet. Zijn de logaritmen van de aandelenopbrengsten normaal verdeeld? We zien vaak dat er sprake is van een klokvormige verdeling van de opbrengsten maar met meer waarnemingen in de staarten van de verdeling en meer rond het gemiddelde dan bij een normale verdeling. Dit duidt op de verzameling van Pareto-verdelingen, waarvan de normale verdeling deel uitmaakt. Er is een aantal toetsen uitgevoerd naar de normaliteit. Onder andere is de Student-Range (SR) bepaald en de waarde geschat van de karakteristieke coëfficiënt (α) van de Pareto-verdeling. Er stonden ons twee datasets ter beschikking. Enerzijds zijn dat 1000 dagkoersen van drie ondernemingen en anderzijds dag- en weekkoersen voor de ondernemingen die opgenomen zijn in de ANP-CBS beursindex.

Een van de voordelen van het beschikbaar zijn van van zowel dag- als weekkoersen is, dat we de invloed van het berekeningsinterval kunnen na gaan. Op grond van de uitkomsten van de diverse toetsen zouden we de hypothese van normaliteit moeten verwerpen. Dit geschiedt dan op statistische gronden. We willen de hypothese desondanks toch handhaven. Zoals aan het einde van hoofdstuk twee is weergegeven geschiedt dit op "economische" gronden. De voornaamste argumenten zijn dat de afwijkingen gering zijn en dat veel modellen in de financierings- en beleggingstheorie uitgaan van normaliteit.

In hoofdstuk 3 worden problemen omtrent indices behandeld. Binnen het CAPM speelt de verwachte waarde van de marktportefeuille een belangrijke rol. De marktportefeuille valt na te bootsen met een marktindex. Er is een beschrijving gegeven van de belangrijkste indices op de Amerikaanse en de Nederlandse aandelenmarkt. Per saldo, omdat de destijds bestaande indices niet goed voldeden, is een tweetal nieuwe indices gepresenteerd. Dit betreft enerzijds een marktwaarde gewogen index (de TAM) en anderzijds een ongewogen index (de TAM-O). Het gedrag van beide indices is nagegaan en zij zijn vergeleken met de ANP-CBS beursindex.

In het daarop volgende hoofdstuk zijn waarden gepresenteerd van de zogenaamde bèta's van aandelen. Bij de berekening van die waarden zijn zowel de TAM als de TAM-O gebruikt als marktindices. Daarnaast is aandacht geschonken aan stabiliteit, stationairiteit en voorspelbaarheid van bèta's van Nederlandese aandelen.

In hoofdstuk 5 is de optietheorie aan de orde gesteld, voor zover deze nodig is voor onze probleemstelling. Eerst zijn optieprijzen afgeleid onder de veronderstelling dat aandelenkoersen binomiaal verdeeld zouden zijn. Op deze manier kan inzicht verkregen worden in de betekenis van de factor $N(d_2)$ van het model van Black & Scholes. Deze factor geeft in een risico-neutrale wereld de kans weer dat de aandelenkoers op

het einde van de looptijd van de optie boven de uitoefenprijs komt te liggen.
Een van de belangrijke factoren bij het optiemodel is de variantie van de aandelenopbrengsten. Deze kan aan de hand van historische koersen bepaald worden, maar veel beter is het gebruik te maken van de impliciete variantie. Dit is de vari-antie die de modelprijs gelijk doet zijn aan de beursprijs van een optie. Zo meten we de variantie van de "markt". Aandacht is besteed aan het gewogen gemiddelde van de diverse impliciete varianties.

In hoofdstuk 6 is de factor $N(d_2)$ nader onderzocht. In de bestaande literatuur over opties is daaraan tot nu toe weinig of geen aandacht geschonken. In dat hoofdstuk wordt uitgegaan van risico-neutraliteit. Onder die omstandigheden is die factor te beschouwen als een kansparameter. Door verschillende uitoefenprijzen te nemen, is het mogelijk om de gehele kansverdeling van de aandelenprijs weer te geven op ieder toekomstig tijdstip. De invloed van wijzigingen van de parameters op de waarde van de factor $N(d_2)$ is geanalyseerd. Deze parameters zijn: de aandelenprijs, de uitoefenprijs, de rentestand, de resterende looptijd en de onzekerheid.

In hoofdstuk 7 is de veronderstelling van risico-neutraliteit vervangen door risico-afkeer. De verwachte groei in de aandelenprijs kan dan worden weergegeven met behulp van het CAPM. Gegeven het verwachte rendement van de marktportefeuille, de risicovrije rentevoet en de bèta van het aandeel kan het verwachte rendement van het aandeel worden berekend. Als er geen dividend uitkeringen zijn in de betrokken periode, geeft dit verwachte rendement de groei aan in de aandelenprijs. In dit hoofdstuk is ook een plaats ingeruimd voor de lognormale verdeling, daar deze verdeling uitgangspunt voor de analyse is. Indien we het CAPM in een continue vorm nemen, kunnen we dit model in de kansparameter van het optiemodel uit het vorige hoofdstuk brengen. De factor $N(d_3)$ geeft dan de kans aan dat de aandelenprijs boven de uitoefenprijs komt te liggen in een risico-mijdende wereld. Met behulp van deze kans kunnen we de verdeling van de toekomstige aandelenprijzen bepalen.

8.2 Conclusies

We willen hier in het kort de voornaamste conclusies uit de vorige hoofdstukken weergeven.

Indien we kijken naar de feitelijke verdeling van de aandelenrendementen dan blijkt dat deze wel klokvormig is, maar aan de staarten van de verdeling en rond de verwachtingswaarde vinden we teveel waarnemingen in vergelijking met een normale verdeling. De Student-Range verwerpt de hypothese van normaliteit voor koersen op dagbasis voor de gehele steekproef, maar niet voor de gehele steekproef op weekbasis. De bij de Stabiele Pareto-verdeling behorende karakteristieke coëfficiënt (α) is voor zowel op dagbasis als op weekbasis berekende rendementen kleiner dan twee. Wel zijn de waarden op weekbasis bijna steeds groter dan op dagbasis. Op statistische gronden zou de hypothese van normaliteit verworpen dienen te worden. Op "economische" gronden kan toch uitgegaan worden van normaliteit.

Het samenstellen van een goede marktindex is geen eenvoudige zaak. Onderscheid kan gemaakt worden in gewogen en ongewogen indices. Daarnaast kan de onderliggende beleggingsstrategie gebaseerd zijn op een "buy and hold" of op een periodieke herallocatie. De bestaande indices voldoen niet goed voor het onderzoek naar de bèta's van aandelen. Onze nieuwe indices, de TAM en de TAM-O zijn als "total return" indices beter bruikbaar en vallen onder de eerste strategie.

Men kan bèta's berekenen met als marktindex de TAM of de TAM-O. Bij de TAM als marktindex treffen we enkele negatieve waarden aan, bij de TAM-O zijn alle bèta's positief. Indien de schattingsperiode wat langer wordt, zijn alle bèta's bij de TAM ook positief. Dit geldt ook indien men de gemiddelde bèta per subgroep bepaalt. Bèta's blijken niet stabiel en ook niet volledig stationair te zijn. Uit analyse van de Blume methode voor het voorspellen van de bèta's worden geen aanwijzigingen gevonden voor eventuele betere schattingen.

Het is mogelijk optieprijzen te berekenen indien de aandelenkoersen binomiaal verdeeld zijn. Uit de analyse blijkt dat het kopen van aandelen met geleend geld vergelijkbaar is met het kopen van een call optie. In een situatie van risiconeutraliteit is de waarde van een calloptie gelijk aan het gedisconteerde verschil van de verwachte aandelenprijs op het einde van de looptijd en de uitoefenprijs. De disconteringsfactor is de risicovrije interestvoet. Het bekende model van Black & Scholes is te beschouwen als een limietgeval van het binomiale model.
Uit de marktprijzen van opties is het mogelijk de impliciete variantie te berekenen. We meten dan de variantie die "leeft" in de markt. Het gewogen gemiddelde van de impliciete varianties van een aandeel kan verkregen worden door te wegen met de afgeleide van de calloptie naar de variantie. Zo wegen meer gevoelige opties zwaarder mee. Men kan ook als benadering de langstlopende optie nemen die at-the-money of net in-the-money is.

Uit de benadering via de binomiaal verdeelde koersen blijkt dat de factor $N(d_2)$ op te vatten is als een kansgrootheid. Namelijk de kans dat de aandelenprijs aan het einde van de looptijd van de optie boven de uitoefenprijs komt te liggen oftewel de kans dat de optie in-the-money eindigt. Dit geldt in een risico-neutrale wereld. Met behulp van deze factor kunnen we in die wereld de verdeling van de toekomstige aandelenprijzen weergeven. Verhoging van de aandelenkoers verhoogt de kans dat de optie in-the money eindigt. Verhoging van de uitoefenprijs geeft een omgekeerde relatie. Er bestaat een positief verband tussen rentewijzigingen en de kans. Het

is niet zonder meer te zeggen wat het verband is tussen wijzigingen in de looptijd en de kans. Voor at-the-money- opties is het verband tussen rentevoet en variantie van belang. Bij deze opties geldt dat er een positief verband bestaat tussen wijziging van de resterende looptijd en de kans indien de variantie kleiner is dan twee maal de rentevoet, terwijl dit verband negatief is indien de variantie groter is dan twee maal de rentevoet. In het algemeen geldt voor alle type opties dat, als S_t/E groter is dan exp $[(r-\sigma^2/2)T]$, er een negatief verband bestaat en in het omgekeerde geval een positief verband tussen wijziging van de resterende looptijd en de waarde van $N(d_2)$.
Ook bij wijzigingen van de onzekerheid (de variantie) is niet zonder meer te zeggen wat er met de kans gebeurt. Het teken van dit verband hangt af van het teken van de waarde van d_1 uit de optieformule en wel omgekeerd, dat wil zeggen indien d_1 negatief is zal een vergroting van de onzekerheid leiden tot een verhoging van de kans dat de optie in-the-money eindigt. Is d_1 echter positief, dan wordt de kans kleiner. Het omslagpunt wordt bereikt bij $\ln(S_t/E)= -(r+\sigma^2/2)T$. Alleen bij in-the-money opties kan er een positief verband bestaan tussen wijzigingen in de variantie en de kans. Bij out-of-the-money en at-the-money opties geldt steeds dat als de variantie toeneemt de kans daalt. Wel geldt dat, als de variantie toeneemt, de waarde van een optie stijgt.

Indien we een lognormale verdeling van aandelenprijzen veronderstellen, houdt dat in dat de logaritmen van de opbrengsten normaal verdeeld zijn. De logaritmen van het quotiënt van de aandelenprijs van morgen en van vandaag is te schrijven als de som van een driftterm en een Wienerproces. De groeifactor van de aandelenprijs is gelijk aan de gemiddelde logaritmische opbrengst plus de helft van de variantie uit de logaritmische opbrengsten. Bij risico-neutraliteit is deze gelijk aan de risicovrije interestvoet, bij risico-mijdend gedrag aan het geëiste rendement uit de SML van het CAPM.

De bèta van een optie is groter dan de bèta van een aandeel. De eerste is namelijk gelijk aan het product van de optie-elasticiteit (relatieve verandering van de optieprijs tengevolge van een relatieve verandering van de aandelenprijs) en de aandelenbèta. Deze optie-elasticiteit heeft steeds een waarde die groter is dan één. Eenzelfde verband bestaat er tussen de standaardafwijking van de optie en het aandeel.

In een wereld met risico-mijdend gedrag gelden, voor wat betreft het teken, dezelfde verbanden tussen wijzigingen van de parameters en de kans dat de optie in-the-money eindigt. De kans is wel gevoeliger voor mutaties in de aandelenprijs of de uitoefenprijs. Voor wat betreft de wijzigingen in de resterende looptijd, gelden ook dezelfde verbanden als in de situatie met risico-neutraliteit, alleen de omslagpunten liggen op hogere waarden. Dit is ook het geval bij de variantie. Verhoging van het systematische risico verhoogt de kans.

Bijlage met onjuiste vermeldingen

Copeland en Weston [1988] blz. 276: "which is the probability that the option will finish in-the-money, i.e. the probability that it will be exercised." en verder "Thus the Black-Scholes model can be interpreted as the stock price multiplied by the inverse of the hedge ratio, minus the discounted exercise price multiplied by **the probability that the option will be exercised."**

Weston en Copeland [1986] blz. 500: "We can interpret $N(d_2)$ as the probability that the option will finish in-the-money."

Jarrow en Rudd [1983] blz. 118: "and increasing σ simple increases the probability that the option will end up in-the money at maturity."

LITERATUURLIJST

Aitchison,J en Brown,J.A.C., **The Lognormal Distribution**, Cambridge: Cambridge University Press, 1957.

Alexander, G.J., en Chervany, N.C., On the estimation and stability of beta, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, vol. 15 no. 1, maart, 1980, blz. 123-137.

Altman,A.I., Jacquillat,B. en Levasseur, M., Comparative analysis of risk measures: France and the United States, **Journal of Finance**, no. 29, 1974, blz. 1495-1511.

Ankum,L.A. en Dorsman,A.B., **De Efficientie van de Amsterdamse Effectenbeurs**, Economische Monografieen, no. 2, Universiteit van Amsterdam, Scheltens, Holkema en Vermeulen, Amsterdam, 1983.

Ankum,L.A. en Dorsman,A.B., De uitkomsten van twee beleggingsstrategieen en de efficientie van de Amsterdamse aandelenmarkt, in Dorsman, v.d.Hilst en Wijmenga (red), **De Amsterdamse aandelenmarkt, theorie en praktijk**, Samsom Uitgeverij, Alphen aan den Rijn-Brussel, 1987, blz 107-121.

Bachelier,L., **Theorie de la speculation**, Paris, Gauthier-Villars, Herdrukt in Cootner,P.H.(1964), **The Random Character of Stock Prices**, Cambridge,Mass., 1900.

Baesel, J.B., On the assessment of risk: some further considerations, **Journal of Finance**, vol. 29, 1974, blz. 1491-1494.

Beckers,S., Standard Deviations as Predictors of future Stock Price Variability, **Journal of Banking and Finance**, 5, 1981, blz. 363-381.

Black,F., Fact and Fantasy in the Use of Options, **Financial Analysts Journal**, July-August, 1975, blz. 61-72.

Black,F. en Scholes,M., The pricing of options and corporate liabilities, **Journal of Political Economy**, 81, no. 3, May-June, 1973, blz. 637-654.

Blattberg,R. en Gonedes,N., A comparison of the stable and student distribution as statistical models for stock prices, **The Journal of Business**, vol. 47, no. 2, 1974, blz. 244-288.

Blume, M., On the assessment of risk, **Journal of Finance**, vol. 26, no. 1, 1971, blz. 1-10.

Boissevain,R.L. en v.Doorn,R.J.W.B., Correctie van cijfers per aandeel, **Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde**, vol 51, no. 3, 1977, blz 120-137.

Brada,J.E.H. en v.Tassel,J., The distribution of stock price differences: Gaussian after all?, **Operation Research**, vol. 14, no 2, 1966, blz.334-340.

Conrad,K. en Juttner,D.J., Recent behaviour of stock prices in Germany and the random walk hypothesis, **Kyklos**,26, 1973, blz. 576-598.

Copeland,Th.E. en Weston,J.F., **Financial Theory and Corporate Policy**, Addison-Wesley Publishing Company, 1988.

Cox,J.C., Ross,S.A. en Rubinstein,M., Option Pricing: A Simplified Approach, **Journal of Financial Economics**, sept., 1979, blz. 229-263.

Cox,J.C., en Rubinstein, M., **Options Markets**, Englewood Cliffs, New York, Prentice-Hall,Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.

Dorsman,A.B. en Gooijer,de,J.G., Het verloop van de koersen op de Amsterdamse effectenbeurs en de random walk hypothese, **Bedrijfskunde**, 54, 1982, blz. 370-378.

Dorsman,A.B. en v.d.Hilst,J., De rendementsverdeling op de Amsterdamse Effectenbeurs, in Herst,A.C.C., v.d.Meulen,J. en Ruizendaal,G.J. (red.), **Financiering en Belegging, Stand van zaken anno 1983**, Erasmus Universiteit, 1983, blz. 141-150.

Dorsman,A.B. en v.d.Hilst,J, Een nieuwe marktindex voor aandelen, **Economisch Statistische Berichten**, 16 mei 1984

Dorsman,A.B. en v.d.Hilst,J., De invloed van het berekeningsinterval en de beurswaarde op de fondsbèta's., in v.d. Bergh , W.M., v.d. Meulen,J., Ruizendaal,G.J. en Verhaegen, P.H.A .M. (red.), **Financiering en Belegging, Stand van zaken anno 1984**, Erasmus Universiteit, 1984, blz. 281-296.

Dorsman,A.B. en de Gooijer,J.G., Het verloop van de koersen op de Amsterdamse Effectenbeurs en de random walk hypothese, **Bedrijfskunde**, vol. 54, no. 4, 1982, blz. 370-378.

Dorsman,A.B. en v.d.Hilst,J., De Amsterdamse beursindex gewogen en te licht bevonden, **Bank-en effectenbedrijf**, vol. 8/9 , 1984, blz. 251-255.

Dorsman, A.B. en v.d.Hilst, J., Een nadere analyse van de stationariteit van de Nederlandse fondsbèta's, **Bedrijfskunde**, vol. 57, no. 3, 1985, blz. 301-305.

Dorsman,A.B. en v.d.Hilst,J., De bèta's van 52 fondsen op de Amsterdamse Effectenbeurs, **Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde**, vol. 59, no. 3, 1985, blz. 116-129.

Dorsman,A.B. en v.d.Hilst,J., Het voorspellen van bèta's, **Maandblad voor Accountancy en Bedrijfshuishoudkunde**, vol. 59, no. 8, 1985, blz. 335-348.

Dorsman,A.B. en v.d.Hilst,J., De Tilburg-Amsterdam-Marktindex, in Dorsman, v.d.Hilst en Wijmenga(red), **De Amsterdamse aandelenmarkt, theorie en praktijk**, Samsom Uitgeverij, Alphen aan den Rijn-Brussel, 1987, blz 123-129.

Dorsman,A.B. en v.d.Hilst,J., De fondsbèta's, in Dorsman, v.d.Hilst en Wijmenga(red), **De Amsterdamse aandelenmarkt, theorie en praktijk**, Samsom Uitgeverij, Alphen aan den Rijn-Brussel, 1987, blz 153-158.

Dorsman,A.B. en v.d.Hilst,J., Stabiliteit, stationairiteit en voorspelbaarheid van fondsbèta's, in Dorsman, v.d.Hilst en Wijmenga(red), **De Amsterdamse aandelenmarkt, theorie en praktijk**, Samsom Uitgeverij, Alphen aan den Rijn-Brussel, 1987, blz 158-168.

Dryden,M.H., A statistical study of the U.K. share prices, **Scottish Journal of Political Economy**, 17, 1970, blz. 369-389.

Eijgenhuijsen,H.G., De herziene sectorindeling van de ANP-CBS beursindex: een verbetering?, **Bedrijfskunde**, vol. 50, no. 3, 1978, blz. 237-239.

Elgers,P.T. en Murray,D.,The impact of the choice of market-index on the empirical evaluation of accounting risk measures, **Accounting Review**, vol. 62, no 2, 1982, blz 358-375.

Elton,E.J. en Gruber,M.J. (ed.'s), **International Capital Markets**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975

Evans,J.L. en Archer,S.H., Diversification and the reduction of dispersion: an emperical analyses, **Journal of Finance**, vol. 23, no. 5, 1968, blz. 761-767.

Fabry,J. en Grembergen, W,v., De verdeling van het rendement van Belgische aandelen, **Workingpaper 76-24**, Universiteit van Antwerpen, 1976.

Fama,E.F., The behavior of stock market prices, **Journal of Business**, vol. 38, 1965, blz. 34-105.

Fama,E.F., Portfolio analysis in a stable market, **Management Science**, vol. 11, no. 3, 1965, blz. 404-419.

Fama,E.F. en Roll,R., Some Properties of Symmetric Stable Distribution, **Journal of the American Statistical Association**, vol. 63, 1968, blz. 817-836.

Fama,E.F., Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work, **Journal of Finance**, mei 1970, blz. 383-417.

Fama,E.F., **Foundations of Finance**, Basic Books, New York, 1976.

Fama,E.F. en Roll,R., Parameters estimates for symmetric stable distribution, **Journal of the American Statistical Association**, vol. 63, 1971, blz. 331-338.

Fase,M.G., Een index voor het koersverloop van aandelen: een hoofdcomponenten-analyse, **Bank- en Effectenbedrijf**, vol. 25, 1976, blz. 409-415.

Fisher,L., Some new stock market indexes, **Journal of Business**, vol. 39, suppl. jan. 1966, blz. 191-225.

Foster,G., Asset pricing models:further tests, **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, mrt., 1978, blz. 39-52.

Galai,D. en Masulis,R.W., The Option Pricing Model and the Risk Factor of Stock, **Journal of Financial Economics**, 3, no 1/2, Jan-March, 1976, blz. 53-82.

Gooijer,de.J., Correlaties in aandelenrendementen: enige statistische aspecten, in Dorsman, v.d.Hilst en Wijmenga (red), **De Amsterdamse aandelenmarkt, theorie en praktijk**, Samsom Uitgeverij, Alphen aan den Rijn-Brussel, 1987, blz 47-55.

Granger, C.W.J., en Morgenstern, O., **Predictability of Stock-Market Prices**, Heath-Lexington Book, Lexington, Mass., 1970.

Hartle,D.H.A. en Pearson,E.X., The Distribution of the Ratio , **Bionetrica**, 1954, blz. 491.

Hawawini, G.A., Why beta shift as the return interval changes , **Financial Analysts Journal**, vol. 39, 1983, blz. 73-77.

Hilst,J.,van der, Zijn aandelenkoersen normaal verdeeld?, in Schuit,J.W.R., Verhaegen,J.H.A.M. en van Vliet,J.K. (red.) **Financiering en Belegging, Stand van zaken anno 1981**, Vakgroep Financiering en Belegging, Erasmus Universiteit Rotterdam, 1981, blz. 177-187.

X Hilst,J.,van der, Beta's en de stabiliteit hiervan op de Nederlandse vermogensmarkt, in Herst,A.C.C., Schuit,J.W.R. en van Vliet,J.K. (red.), **Financiering en Belegging, Stand van zaken anno 1982**, Vakgroep Financiering en Belegging, Erasmus Universiteit Rotterdam, 1982, blz. 111-121.

Hilst,J.,v.d., De impliciete variantie uit opties, **Bedrijfskunde**, jrg 54, no. 3, 1982.

Hilst,J.,v.d., Optieprijzen bij binomiaal verdeelde koersen , **Bedrijfskunde**, jrg. 58, no 1, 1986.

Jarrow,R.A. en Rudd,A., **Option Pricing**, Dow Jones-Irwin, Homewood, Illinois, 1983.

Jarrow,R.A., **Finance theory**, Prentice-Hall,Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.

Jennergren,L.P. en Korsvold,P.E., The non-random character of Norwegian and Swedisch stock market prices, **International Capital Markets**, red. Elton,E.J.&Gruber,M.J., North-Holland, Amsterdam, 1975, blz. 37-54.

Jennergren,L.P. en Toft-Nielson,P., An investigation of random walks in the Danish stock market, herdrukt in **European**

Equity Markets, red. Hawawini,G.A. & Michel,P., Garland Publishing Company, New York, 1977, blz. 254-269.

Kantor,M., On market indexes,in **Szego & Shell**, 1973, blz. 620-632.

Mc Kean,H.P. **Stochastic Integrals**, Academic Press, New York, 1965.

Kemna,A.G.Z., Vliet, v.,J.K. en Wijmenga,R.Th., Een nieuwe marktindex voor aandelen, **Economisch Statistische Berichten**, 7, 1984, blz. 1058-1059.

Kemna,A.G.Z., Options in Real and Financial Markets, **Academisch Proefschrift**, Erasmus Universiteit Rotterdam, 1988.

Kendall,M.C., The Analyses of Economic Time Series - part 1: prices, **Journal of the Royel Statistical Society**, vol. 96, 1953, blz. 11-25.

Kendall,M.C. en Stuart, A., **The Advanced Theory of Statistics**, vol. 3, Charles Griffin & Co.Ltd., Londen, 1968

Klemkosky, R.C. en Martin,J.D., The adjustment of beta forecasts, **Journal of Finance**, vol. 30, no. 4, 1975, blz. 1123-1128.

Latané,H.A. en Young,W.E., Test of portfolio building rules, **Journal of Finance**, sept. 1969, blz. 595-612.

Latané,H.A. en Tuttle,D.L., **Security Analyse and Portfolio Management**, 1970.

Latané,H.A. en Rendleman,R.J., Standard deviations of stock price ratios implied in option prices, **Journal of Finance**, 31 no. 2, 1976, blz. 369-381.

Levy,P., **Calcul de Probabilites**, Cauthiers-Villars, Parijs, 1925.

Levy,P., **Theorie de l'addition des variables aletores**, Cauthiers-Villars, Parijs, 1937.

X Levy, R.A., On the short-term stationarity of beta coefficients, **Financial Analysts Journal**, nov-dec, 1971, blz.55-62.

Lorie,J.L. en Hamilton,M.T., **The Stock Markets, Theories and Evidence**, Richard D. Erwin, Inc. Homewood Illinois, 1973.

Mandelbrot,B., The variation of certain speculative prices, **Journal of Business**, vol. 36, 1963, blz. 394-419.

Mandelbrot,B. en Taylor,H.M., On the distribution of stock prices differences, **Operation Research**, vol. 15, 1959, blz. 145-173.

Mandelbrot,B., The Variation of Certain Speculative Prices, **Journal of Business**, okt. 1963, blz. 394-419.

Markowitz,H.M., Portfolio Selection, **The Journal of Finance**, vol. 7, no. 1, march 1952, blz. 77-91.

Markowitz,H.M., **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments**, New York: Wiley, 1959.

Merton,R.C., An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, **Econometrica**, no. 41, 1973, blz. 867-887.

Merton,R.C., Theory of Rational Option Pricing, **Bell Journal of Economics and Management Science**, 4, no. 1, Spring 1973, blz. 141-183.

X Merton,R.C., On the Pricing of Corporate Debt:The Risk Structure of Interest Rates, **Journal of Finance**, 29, no. 2, May 1974, blz. 449-470.

Mood,A.M., Graybill,F.A. en Boes,D.C., **Introduction to the Theory of Statistics**, McGray-Hill, 3_{de} edition, 1974.

Moore,A.B., Some Characteristics of Changes in Common Stock Prices, Herdrukt in **Cootner**, 1962, blz. 139-161.

Osborne, M.F.M., Brownian Motion in the Stock Market, **Operations Research**, no 7, March-April, 1959, blz. 145-173.

Papaioannou,G., Informational efficiency tests in the Athens stock exchange, in **European Equity Markets**, red. Hawawini, G.A.&Michel,P.A., Garland Publishing Company, New York, 1984, blz. 367-381.

Praetz,P.D., The distribution of share price changes, **The Journal of Business**, vol. 45, 1972, blz. 49-55.

Regidor,B.V. en Sercu,P., Behavior of share prices of the Brussels stock exchange, **Tijdschrift voor Economie en Management**, vol. 21, no. 3, 1976, blz. 359-382.

Rietzchel,E.F., Een herbeleggingsindex voor aandelen, **Doctoraal scriptie**, Universiteit van Amsterdam, 1983.

Rietzchel,E.F., De stemmingsindex voor aandelen, in Dorsman, v.d.Hilst en Wijmenga (red), **De Amsterdamse aandelenmarkt**,

theorie en praktijk, Samsom Uitgeverij, Alphen aan den Rijn-Brussel, 1987, blz. 129-134.

Scholes,M. en Williams, J., Estimating betas from nonsynchronus data, **Journal of Financial Economics**, vol. 5, no. 3, 1977, blz. 309-327.

Schwartz,R.A. en Whitcomb, D.K., The time-variance relationship: evidence on autocorrelation in common stock returns, **Journal of Finance**, vol. 32, no. 1, 1977, blz. 41-55.

Smith,C.W., Option Pricing,a review, **Journal of Financial Economics**, 3, no 1/2, Jan-March, 1976, blz. 3-51.

Solnik,B.H., Note on the Validity of the Random Walk for European Stock Prices, **The Journal of Finance**, vol. 28, 1973, blz. 1151-1159.

Teichmoeller,J., A note on the distribution of stock market price changes, **Journal of the American Statistical Association**, vol. 66, 1971, blz. 282-284.

Tempelaar,F.M. en Overmeer, J.M., Perfectie, compleetheid en efficiëntie; theoretische kenmerken van de vermogensmarkt, in Dorsman, v.d.Hilst en Wijmenga(red), **De Amsterdamse aandelenmarkt, theorie en praktijk**, Samsom Uitgeverij, Alphen aan den Rijn-Brussel, 1987, blz. 69-87.

Tempelaar,F.M., **Vermogensmarkt en ondernemingsdoel in de financieringstheorie**, Ac.proefschrift, Drukkerij van Denderen b.v., Groningen, 1987.

Theobald.M. en Whitman,J., The variabilities and correlations of stock market indices, **Accounting and Business Research**, 1978, blz. 82-85.

Uhlir,H. Uberprüfing der random-walk-hypothese auf dem Osterreichische aktienmarkt, **Verlag der Osterreichischen Akademie der Wissenschaften**, Wien, 1979.

Weston,J.W. en Copeland,T.E., **Managerial Finance**, The Dryden Press, New York, 1986

Wijmenga,R.Th., Indices voor de Nederlandse aandelenmarkt, in Dorsman, v.d.Hilst en Wijmenga(red), **De Amsterdamse aandelenmarkt, theorie en praktijk**, Samsom Uitgeverij, Alphen aan den Rijn-Brussel, 1987, blz. 135-146.

Wouters,P., De waarschijnlijkheidsbenadering van het koersverloop van aandelen, **Tijdschrift voor Economie**, 16, 1971, blz. 329-392.

STELLINGEN

1.

Chaos is het begin van creativiteit

2.

De factor $N(d_2)$ uit het optie-model van Black & Scholes (B&S) geeft in een wereld met risiconeutrale beslissers de kans weer dat de optie "in-the-money" eindigt.

3.

De factor $N(d_3)$ geeft in een wereld met risicomijdende beslissers de kans weer dat de optie "in-the-money" eindigt.

4.

Een vergroting van de variantie leidt in het optiemodel van B&S steeds tot een hogere waarde van de call, maar niet altijd tot een hogere kans dat de optie in-the-money eindigt.

5.

Bij indices zijn economische eisen belangrijker dan statistische.

6.

"Eén kan er maar de beste zijn" geldt in het algemeen niet voor een aandelenindex.

7.

Het zou aanbeveling verdienen de jaarrekening van ondernemingen, zeker indien de onderneming ter beurze genoteerd is, op basis van marktwaarde te maken. In de toelichting kan dan eventueel een jaarrekening op basis van boekwaarde toegevoegd worden.

8.

Met behulp van technische analyse moet het niet mogelijk zijn op de aandelenmarkt consistent abnormale opbrengsten te behalen.

9.

Het feit dat er in Nederland op de European Options Exchange Amerikaanse opties op Nederlanse aandelen, Europese opties op een Nederlandse index en Europese opties op een Amerikaanse index verhandeld worden, kan tot verwarring leiden.

10.

Dankzij de grote binnenlandse staatsschuld erven onze kinderen veel staatsobligaties.

11.

"Zich gemakkelijk in te kunnen denken in de wijze, waarop vanuit de onderneming geredeneerd wordt, moet het resultaat zijn der studie van bedrijfseconomie". (Uit: J.Grooten, Inleiding tot de studie der bedrijfshuishoudkunde, Nijgh & Van Ditmar's uitgevers-maatschappij 1924)

12.

Zeker indien de marktwaarde van het eigen vermogen kleiner is dan de boekwaarde, is voor de vaststelling van het garantievermogen het belang van de marktwaarde groter dan dat van de boekwaarde

13.

In de opleiding tot accountant dient meer aandacht geschonken te worden aan ondernemingsfinanciering.

14.

De overheid zou het gebruik van de bromfiets meer moeten stimuleren, in het bijzonder voor personen ouder dan 21 jaar.

15.

"Den blauwe kiel, hij staat den werkman goed".

De verdeling van de toekomstige aandelenprijzen.
Jan van der Hilst

SUMMARY

The question put forward in this study is as follows:

Is it possible to make inferences about the distribution of future stock prices.

Chapter 2 pays attention to the question of the actual distribution of stock quotations at the Amsterdam stock market. Are the logarithms of stock returns normally distributed? We often observe a bell-shaped distribution of the returns but with more observations in the tails of the distribution and more around the average than under a normal distribution. This suggests a Pareto-distribution of which the normal distribution is an special case. Some tests are carried out concerning the normality. The Studentized-Range (SR), among other things, is defined and the characteristic coefficient (α) of the Pareto-distribution is estimated.
Two data-sets are at our disposal: 1000 dayly observations on three large companies and dayly and weekly observations on all companies that make up the ANP-CBS stock market index. One of the advantages of the availability of dayly as well as weekly quotations is that we can examine the influence of the calculation interval.
Based on the results of the various tests we ought to reject the hypothesis of normality. This is based on statistical grounds. Nevertheless we maintain the normality-hypothesis. As discussed at the end of chapter 2 this is based on "economic" grounds. The main arguments are that the deviations are small and that many models in finance and investment theory are based on the normality assumption.
In chapter 3 problems concerning market indices are dealt with. Within the CAPM the expected value of the market portfolio plays an important role. The return on the market portfolio can be measured by a marketindex. A description

is given of the most important indices at the American and Dutch stock markets. Because at that time the existing indices were not satisfactory, a couple of new indices are presented, a market value weighed index (TAM) and an unweighed index (TAM-O). The behaviour of both indices is examined and they are compared with the ANP-CBS stock market index.

In the following chapter values of stock beta are presented. In the calculations of those values the TAM as well the TAM-O have been used as market indices. Attention is also paid to the stability, the stationarity and the predictability of the betas of Dutch stocks. The betas appear not to be stable nor completely stationary. No improvements have been found on the Blume-method of predicting betas.

In chapter 5 option theory is discussed for as far this is necessary for the thesis. First of all option prices are derived under the assumption that stock returns are binomially distributed. In this way insight can be gained into the meaning of the factor $N(d_2)$ of the Black & Scholes model. This factor shows the probability of the event that, in a risk-neutral world, the stock price at the expiration date exceeds the exercise price and this enables us to derive the distribution of future stock prices. This however does not apply to a world with risk-averse behaviour.

One of the most important factors in the option model is the variance of the stock returns. This variance can be estimated on the basis of historical data, but it is better to use the "implicit" variance. This is the variance which equalizes the model price to the market price of an option. Thus we measure the variance of the "market". Attention is paid to the weighed average of the various implicit variances.

In chapter 6 the factor $N(d_2)$ is examined more closely. This has received little or no attantion in literature on options. In this chapter risk neutrality is assumed. The influence of the parameters' changes on the value of the factor $N(d_2)$ is analyzed. These parameters are: the stock price, the exercise price, the rate of interest, the remaining time to expiration and the level of uncertainty. An increase in the stock price raises the probability that the option ends in-the-money; an increase in the exercise price shows a negative effect, whereas a positive relationship exists between changes in the interest rate and the probability. It is not possible to simply state the relationship between changes in the time to maturity and the probability. For at-the-money options the relationship between the rate of interest and the variance is important. For that options there exist a positive relationship between changes in the time remaining to maturity and the probability in case the variance is less than twice the rate of interest, whereas this relationship is negative in case the variance is larger than twice the rate of interest. In general it is true for all types of options that when S_t/E is larger than $\exp[(r-\sigma^2/2)T]$ there existst a negative relationship and in the reverse case a positive relation between changes of the remaining time to maturity and the value of $N(d_2)$. Also changes in the level of uncertainty (the variance) have an ambiguous effect on $N(d_2)$. The direction of this relationship depends on the sign of d_1 in the option formula: if d_1 is negative, an increase in the level of uncertainty leads to an increase in the probability that the option will end in-the-money. However if d_1 is positive, the probability gets smaller. The critical point is reached at $\ln(S_t/E) = -(r-\sigma^2/2)T$. Only for in-the-money options a positive relationship can exist between changes in the variance and the probability. With out-of-the-money and at-the-money options it is always true that if the variance increases, the probability goes down. The value of the option always goes up when the variance increases.

In chapter 7 the assumption of risk-neutrality is changed into one of risk-aversion. The expected growth of the stock price can be derived from the CAPM. Given the expected return on the market portfolio, the risk-free rate of interest and the beta of the stock, the expected return on the stock can be calculated. If there are no dividend payments during the period in question, this expected return will show the growth of the stock price. In case we consider the CAPM in continuous time, we can incorporate this model into the probability-parameter of the option model from the previous chapter. The factor $N(d_3)$ indicates the probability that the stock price exceeds the exercise prices in a risk-averse world. The relationships between changes in the parameters and the probability that the option ends in-the-money that apply in a world with risk-averse behaviour are the same as those in a risk-neutral world. The probability however is more sensitive to mutations in the stock price or exercise price. As for changes in the remaining time to maturity the same relationships are valid as in the situation of risk-neutrality, only the critical point lies at higher values. This is also the case with the variance. Increasing the systematic risk raises the probability.

By means of the factor $N(d_3)$ we can determine the distribution of the expected stock prices.

TILBURG UNIVERSITY PRESS
P.O. BOX 90153
5000 LE TILBURG
THE NETHERLANDS